



الصفحة
1 4



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2011
الموضوع

9	المعامل	NS25	الرياضيات	المادة
4	مدة الإجتاز	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)		الشعب(ة) أو المستوى

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte cinq exercices indépendants deux à deux.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- Le premier exercice se rapporte aux structures algébriques.
- Le deuxième exercice se rapporte à l'arithmétique.
- Le troisième exercice se rapporte aux nombres complexes.
- Le quatrième exercice se rapporte à l'analyse.
- Le cinquième exercice se rapporte à l'analyse.

Les calculatrices non programmables sont autorisées

Premier exercice : (4 points) **Les deux parties sont indépendantes.****Première partie** : Dans l'anneau $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ on considère les deux matrices suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(On pose : $A^0 = I$ et $A^1 = A$ et $A^2 = A \times A$ et $A^{n+1} = A^n \times A$ pour tout n de \mathbb{N})0.5 1-Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N}) A^{2k} = I$ 0.5 2-Montrer que A admet une matrice inverse A^{-1} que l'on déterminera.**Deuxième partie** : Soit a un nombre réel.Pour tout x et y de l'intervalle $I =]a, +\infty[$ on pose : $x * y = (x - a)(y - a) + a$ 0.5 1-a) Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans I 0.5 b) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative.0.5 c) Montrer que $(I, *)$ admet un élément neutre que l'on déterminera.0.5 2-Montrer que $(I, *)$ est un groupe commutatif.3-On considère l'application : $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$

$$x \mapsto \frac{1}{x - a}$$

0.5 a) Montrer que φ est un isomorphisme de $(I, *)$ vers (\mathbb{R}_+^*, \times) 0.5 b) Résoudre dans l'ensemble I l'équation : $x^{(3)} = a^3 + a$ où $x^{(3)} = x * x * x$ **Deuxième exercice** : (2.5 points)Soit N l'entier naturel dont l'écriture dans la base décimale est : $N = \underbrace{11\dots\dots 1}_{2010 \text{ fois}}$ 0.25 1-Montre que le nombre N est divisible par 110.75 2-a) Vérifier que le nombre 2011 est premier et que $10^{2010} - 1 = 9N$ 0.5 b) Montrer que le nombre 2011 divise le nombre $9N$ 0.5 c) En déduire que le nombre 2011 divise le nombre N .0.5 3- Montrer que le nombre N est divisible par 22121

Troisième exercice : (3.5points)

Première partie : Soit m un nombre complexe non nul. On considère dans l'ensemble \mathbb{C} l'équation d'inconnue z :

$$(E_m) : z^2 + [(1-i)m - 4]z - im^2 - 2(1-i)m + 4 = 0$$

0.5 1- Vérifier que le nombre $z_1 = -m + 2$ est solution de l'équation (E_m)

2- Soit z_2 la deuxième solution de l'équation (E_m)

0.5 a) Montrer que : $z_1 z_2 = 1 \Leftrightarrow im^2 + 2(1-i)m - 3 = 0$

1 b) Déterminer les deux valeurs de m pour lesquelles on a : $z_1 z_2 = 1$

Deuxième partie : Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , On

considère l'application S qui au point M , d'affixe z , fait correspondre le point M' d'affixe z' tel

que : $z' - 1 = -(z - 1)$ et la rotation R de centre le point Ω d'affixe $(1+i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et

soit z'' l'affixe du point $M'' = R(M)$.

0.25 1-a) Montrer que l'application S est la symétrie centrale de centre le point d'affixe 1.

0.25 b) Montrer que : $z'' = iz + 2$.

2- Soit A le point d'affixe 2. On suppose que le point M est distinct du point O origine du repère.

0.5 a) Calculer : $\frac{z'' - 2}{z' - 2}$, en déduire la nature du triangle $AM'M''$.

0.5 b) Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels les points A, Ω, M' et M'' sont cocycliques.

Quatrième exercice : (6.5points)

Première partie : Etude des solutions positives de l'équation $(E) : e^x = x^n$ avec n un entier naturel non nul.

On considère la fonction numérique f définie sur l'ensemble $D = [0, 1[\cup]1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{\ln x} \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0 \quad \text{et soit } (C) \text{ sa courbe représentative dans le plan rapporté à}$$

un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

0.25 1- Vérifier que pour tout x de l'ensemble $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ on a : $e^x = x^n \Leftrightarrow n = f(x)$

0.5 2- Montrer que la fonction f est dérivable à droite en 0.

1.5 3- Calculer les limites : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ensuite interpréter graphiquement les résultats obtenus.

0.75 4- Etudier les variations de la fonction f sur chacun des intervalles $[0, 1[$ et $]1, +\infty[$ puis donner son tableau de variations.

0.5 5- Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

0.5 6- Représenter graphiquement (C) .

0.5 7- Montrer que pour $n \geq 3$, l'équation (E) admet exactement deux solutions a_n et b_n tel que :
 $1 < a_n < e < b_n$

Deuxième partie : Etude des deux suites $(a_n)_{n \geq 3}$ et $(b_n)_{n \geq 3}$

- 0.5 1-Montrer que : $(\forall n \geq 3) b_n \geq n$, en déduire la limite de la suite $(b_n)_{n \geq 3}$
- 0.5 2-a) Montrer que la suite $(a_n)_{n \geq 3}$ est décroissante, en déduire qu'elle est convergente.
- 0.5 b) Montrer que : $(\forall n \geq 3) \frac{1}{n} < \ln(a_n) < \frac{e}{n}$, en déduire la limite de la suite $(a_n)_{n \geq 3}$
- 0.5 c) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^n = e$

Cinquième exercice :(3.5points)

On considère la fonction numérique F définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $F(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$

- 0.5 1-a) Montrer que : $(\forall x \geq 0) 0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2}$
- 0.5 b) Montrer que : $(\forall x \geq 1) e^{-x^2} \leq e^{-x}$ en déduire la limite de la fonction F en $+\infty$
- 0.5 2-Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et que :
- $$(\forall x \geq 0) F'(x) = e^{-2x^2} - 2xF(x)$$

3-On considère la fonction numérique G définie sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$\begin{cases} G(x) = F(\tan x) ; & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ G\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

- 0.25 a) Montrer que la fonction G est continue à gauche en $\frac{\pi}{2}$
- 0.75 b) Montrer qu'il existe un réel c de l'intervalle $]0; +\infty[$ tel que : $F'(c) = 0$
- et que : $F(c) = \frac{e^{-2c^2}}{2c}$

(On pourra appliquer le théorème de ROLLE à la fonction G sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$)

4-On considère la fonction numérique H définie sur $]0; +\infty[$ par : $H(x) = F'(x) \frac{e^{-x^2}}{2x}$

- 0.5 a) Montrer que la fonction H est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$
- 0.5 b) En déduire que c est unique, puis donner le tableau de variation de F .

FIN



الصفحة
1
3



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2011
عناصر الإجابة

9	المعامل	NR25	الرياضيات	المادة
4	مدة الإجابة	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)		الشعب (ة) أو المصلح

Premier exercice	4points
Première partie :1-	Réurrence.....0.5
2-	$A^{-1} = A$0.5
Deuxième partie :1-a)	* loi de composition interne.....0.5
b)	* commutative.....0.25 * associative.....0.25
c)	l'élément neutre est : $e = a + 1$ 0.5
2-	le symétrique de x est $x' = a + \frac{1}{x - a}$0.25 $(I,*)$ groupe commutatif.....0.25
3-a)	φ bijective.....0.25 φ Homomorphisme.....0.25
b)	La solution de l'équation est : $x = 2a$ si $a \geq 0$ et pas de solution si $a < 0$0.5

Deuxième exercice	2.5points
1-	Divisibilité de N par 11.....0.25
2-a)	2011 est premier.....0.5 $10^{2010} - 1 = 9N$0.25
b)	Le théorème de Fermat :2011 divise $10^{2010} - 1$0.5
c)	Application du théorème de gauss0.5
3-	22121=11x2011 ; 11et2011 premier entre eux.....0.5

Troisième exercice	3.5points
Première partie :1-	vérification.....0.5
2-a)	L'équivalence.....0.5
b)	Les deux valeurs de m sont : $\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2}\right) + i\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2}\right) + i\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2}\right)$1
Deuxième partie :1-a)0.25

الصفحة	NR25	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2011 - عناصر الإجابة - مادة: الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)
2		
3		
b)		$z'' - (1+i) = i(z - (1+i)) \dots\dots\dots 0.25$
2-a)		$\frac{z'' - 2}{z' - 2} = -i \dots\dots\dots 0.25$ $AM'M''$ est un triangle isocèle et rectangle en A0.25
b)		La droite d'équation : $x = 1 \dots\dots\dots 0.5$
Quatrième exercice		6.5points
Première partie :1-		Vérification.....0.25
2-		Dérivabilité de la fonction à droite en 0.....0.5
3-		Pour chaque'une des 4 limites0.25 Pour chaque'une des deux interprétations.....0.25
4-		Le calcul de $f'(x)$0.25 Variation de la fonction.....0.25 Tableau de variation0.25
5-		Le point d'inflexion est : $\left(e^2; \frac{e^2}{2} \right) \dots\dots\dots 0.5$
6-		Représentation graphique.....0.5
7-		Existence et unicité de a_n et $1 < a_n < e \dots\dots\dots 0.25$ Existence et unicité de b_n et $b_n > e \dots\dots\dots 0.25$
Deuxième partie :1-		$(\forall n \geq 3) b_n \geq n \dots\dots\dots 0.25$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty \dots\dots\dots 0.25$
2-a)		La suite $(a_n)_{n \geq 3}$ est décroissante.....0.25 La suite $(a_n)_{n \geq 3}$ est convergente.....0.25
b)		Encadrement de $\ln(a_n) \dots\dots\dots 0.25$ Dédution : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1 \dots\dots\dots 0.25$
c)		Dédution.....0.5
Cinquième exercice		3.5points
1-a)		L'encadrement de $F(x) \dots\dots\dots 0.5$
b)		$(\forall x \geq 1) e^{-x^2} \leq e^{-x} \dots\dots\dots 0.25$ Déduire que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0 \dots\dots\dots 0.25$
2-		Dérivabilité de $F \dots\dots\dots 0.25$ Calcul de $F'(x) \dots\dots\dots 0.25$
3-a)		Continuité de la fonction G à gauche en $\frac{\pi}{2} \dots\dots\dots 0.25$ Toute solution plausible est acceptée.

الصفحة 3 3	NR25	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2011 - عناصر الإجابة - مادة: الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)
		$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0 \text{ donc.....}$ <p>Ou pour $\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}$ on a : $0 \leq G(x) = F(\tan x) \leq \tan(x)e^{-\tan x}$ donc.....</p>
b)		<p>-Application du théorème de ROLLE :il existe $c_1 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que :</p> $G'(c_1) = (1 + \tan^2(c_1))F'(\tan c_1) = 0 \dots\dots\dots 0.25$ <p>-Il existe $c \in]0, +\infty[$ tel que $F'(c) = 0$ ($c = \tan c_1$)0.25</p> <p>- $F(c) = \frac{e^{-2c^2}}{2c} \dots\dots\dots 0.25$</p>
4-a)		<p>La fonction H est dérivable sur $]0, +\infty[$</p> <p>et $H'(x) = -\left(2 + \frac{1}{2x^2}\right)e^{-x^2} < 0 \dots\dots\dots 0.5$</p>
b)		<p>La fonction H est une bijection(continue et strictement monotone) et $H(c) = 0$ d'où l'unicité de $c \dots\dots\dots 0.25$</p> <p>Tableau de variation de $F \dots\dots\dots 0.25$</p>