



الصفحة
1 4



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا  
 الدورة العادية 2011  
 الموضوع

9	المعامل	NS25	الرياضيات	المادة
4	مدة الإجتاز		شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)	الشعب(ة) أو المستوى

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte cinq exercices indépendants deux à deux.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- Le premier exercice se rapporte aux structures algébriques.
- Le deuxième exercice se rapporte à l'arithmétique.
- Le troisième exercice se rapporte aux nombres complexes.
- Le quatrième exercice se rapporte à l'analyse.
- Le cinquième exercice se rapporte à l'analyse.

Les calculatrices non programmables sont autorisées

**Premier exercice** : (4 points) **Les deux parties sont indépendantes.****Première partie** : Dans l'anneau  $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$  on considère les deux matrices suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(On pose :  $A^0 = I$  et  $A^1 = A$  et  $A^2 = A \times A$  et  $A^{n+1} = A^n \times A$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  )0.5 1-Montrer que :  $(\forall k \in \mathbb{N}) A^{2k} = I$ 0.5 2-Montrer que  $A$  admet une matrice inverse  $A^{-1}$  que l'on déterminera.**Deuxième partie** : Soit  $a$  un nombre réel.Pour tout  $x$  et  $y$  de l'intervalle  $I = ]a, +\infty[$  on pose :  $x * y = (x - a)(y - a) + a$ 0.5 1-a) Montrer que  $*$  est une loi de composition interne dans  $I$ 0.5 b) Montrer que la loi  $*$  est commutative et associative.0.5 c) Montrer que  $(I, *)$  admet un élément neutre que l'on déterminera.0.5 2-Montrer que  $(I, *)$  est un groupe commutatif.3-On considère l'application :  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ 

$$x \mapsto \frac{1}{x - a}$$

0.5 a) Montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme de  $(I, *)$  vers  $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ 0.5 b) Résoudre dans l'ensemble  $I$  l'équation :  $x^{(3)} = a^3 + a$  où  $x^{(3)} = x * x * x$ **Deuxième exercice** : (2.5 points)Soit  $N$  l'entier naturel dont l'écriture dans la base décimale est :  $N = \underbrace{11\dots\dots 1}_{2010 \text{ fois}}$ 0.25 1-Montre que le nombre  $N$  est divisible par 110.75 2-a) Vérifier que le nombre 2011 est premier et que  $10^{2010} - 1 = 9N$ 0.5 b) Montrer que le nombre 2011 divise le nombre  $9N$ 0.5 c) En déduire que le nombre 2011 divise le nombre  $N$  .0.5 3- Montrer que le nombre  $N$  est divisible par 22121

**Troisième exercice** : (3.5points)

**Première partie** : Soit  $m$  un nombre complexe non nul. On considère dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  l'équation d'inconnue  $z$  :

$$(E_m) : z^2 + [(1-i)m - 4]z - im^2 - 2(1-i)m + 4 = 0$$

0.5 1- Vérifier que le nombre  $z_1 = -m + 2$  est solution de l'équation  $(E_m)$

2- Soit  $z_2$  la deuxième solution de l'équation  $(E_m)$

0.5 a) Montrer que :  $z_1 z_2 = 1 \Leftrightarrow im^2 + 2(1-i)m - 3 = 0$

1 b) Déterminer les deux valeurs de  $m$  pour lesquelles on a :  $z_1 z_2 = 1$

**Deuxième partie** : Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , On

considère l'application  $S$  qui au point  $M$ , d'affixe  $z$ , fait correspondre le point  $M'$  d'affixe  $z'$  tel

que :  $z' - 1 = -(z - 1)$  et la rotation  $R$  de centre le point  $\Omega$  d'affixe  $(1+i)$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ , et

soit  $z''$  l'affixe du point  $M'' = R(M)$ .

0.25 1-a) Montrer que l'application  $S$  est la symétrie centrale de centre le point d'affixe 1.

0.25 b) Montrer que :  $z'' = iz + 2$ .

2- Soit  $A$  le point d'affixe 2. On suppose que le point  $M$  est distinct du point  $O$  origine du repère.

0.5 a) Calculer :  $\frac{z'' - 2}{z' - 2}$ , en déduire la nature du triangle  $AM'M''$ .

0.5 b) Déterminer l'ensemble des points  $M$  pour lesquels les points  $A, \Omega, M'$  et  $M''$  sont cocycliques.

**Quatrième exercice** : (6.5points)

**Première partie** : Etude des solutions positives de l'équation  $(E) : e^x = x^n$  avec  $n$  un entier naturel non nul.

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur l'ensemble  $D = [0, 1[ \cup ]1, +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{x}{\ln x} \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0 \quad \text{et soit } (C) \text{ sa courbe représentative dans le plan rapporté à}$$

un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

0.25 1- Vérifier que pour tout  $x$  de l'ensemble  $]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$  on a :  $e^x = x^n \Leftrightarrow n = f(x)$

0.5 2- Montrer que la fonction  $f$  est dérivable à droite en 0.

1.5 3- Calculer les limites :  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  ensuite interpréter graphiquement les résultats obtenus.

0.75 4- Etudier les variations de la fonction  $f$  sur chacun des intervalles  $[0, 1[$  et  $]1, +\infty[$  puis donner son tableau de variations.

0.5 5- Montrer que la courbe  $(C)$  admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

0.5 6- Représenter graphiquement  $(C)$ .

0.5 7- Montrer que pour  $n \geq 3$ , l'équation  $(E)$  admet exactement deux solutions  $a_n$  et  $b_n$  tel que :

$$1 < a_n < e < b_n$$

**Deuxième partie** : Etude des deux suites  $(a_n)_{n \geq 3}$  et  $(b_n)_{n \geq 3}$

- 0.5 1-Montrer que :  $(\forall n \geq 3) b_n \geq n$  , en déduire la limite de la suite  $(b_n)_{n \geq 3}$
- 0.5 2-a) Montrer que la suite  $(a_n)_{n \geq 3}$  est décroissante, en déduire qu'elle est convergente.
- 0.5 b) Montrer que :  $(\forall n \geq 3) \frac{1}{n} < \ln(a_n) < \frac{e}{n}$  , en déduire la limite de la suite  $(a_n)_{n \geq 3}$
- 0.5 c) Montrer que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^n = e$

**Cinquième exercice** :(3.5points)

On considère la fonction numérique  $F$  définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par :  $F(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$

- 0.5 1-a) Montrer que :  $(\forall x \geq 0) 0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2}$
- 0.5 b) Montrer que :  $(\forall x \geq 1) e^{-x^2} \leq e^{-x}$  en déduire la limite de la fonction  $F$  en  $+\infty$
- 0.5 2-Montrer que la fonction  $F$  est dérivable sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  et que :
- $$(\forall x \geq 0) F'(x) = e^{-2x^2} - 2xF(x)$$

3-On considère la fonction numérique  $G$  définie sur l'intervalle  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  par :

$$\begin{cases} G(x) = F(\tan x) ; & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ G\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

- 0.25 a) Montrer que la fonction  $G$  est continue à gauche en  $\frac{\pi}{2}$
- 0.75 b) Montrer qu'il existe un réel  $c$  de l'intervalle  $]0; +\infty[$  tel que :  $F'(c) = 0$
- et que :  $F(c) = \frac{e^{-2c^2}}{2c}$

(On pourra appliquer le théorème de ROLLE à la fonction  $G$  sur l'intervalle  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ )

4-On considère la fonction numérique  $H$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $H(x) = F'(x) \frac{e^{-x^2}}{2x}$

- 0.5 a) Montrer que la fonction  $H$  est strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$
- 0.5 b) En déduire que  $c$  est unique, puis donner le tableau de variation de  $F$ .

**FIN**



الصفحة

1

3


 الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا  
 الدورة العادية 2011  
 عناصر الإجابة

9	المعامل	NR25	الرياضيات	المادة
4	مدة الإجابة	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)		الشعب (ة) أو المصلح

<b>Premier exercice</b>	4points
Première partie :1-	Réurrence.....0.5
2-	$A^{-1} = A$ .....0.5
Deuxième partie :1-a)	* loi de composition interne.....0.5
b)	* commutative.....0.25 * associative.....0.25
c)	l'élément neutre est : $e = a + 1$ ..... 0.5
2-	le symétrique de $x$ est $x' = a + \frac{1}{x - a}$ .....0.25  $(I,*)$ groupe commutatif.....0.25
3-a)	$\varphi$ bijective.....0.25 $\varphi$ Homomorphisme.....0.25
b)	La solution de l'équation est : $x = 2a$ si $a \geq 0$ et pas de solution si $a < 0$ .....0.5

<b>Deuxième exercice</b>	2.5points
1-	Divisibilité de $N$ par 11.....0.25
2-a)	2011 est premier.....0.5 $10^{2010} - 1 = 9N$ .....0.25
b)	Le théorème de Fermat :2011 divise $10^{2010} - 1$ .....0.5
c)	Application du théorème de gauss .....0.5
3-	22121=11x2011 ; 11et2011 premier entre eux.....0.5

<b>Troisième exercice</b>	3.5points
Première partie :1-	vérification.....0.5
2-a)	L'équivalence.....0.5
b)	Les deux valeurs de $m$ sont : $\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2}\right) + i\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2}\right) + i\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2}\right)$ .....1
Deuxième partie :1-a)	.....0.25

الصفحة	NR25	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2011 - عناصر الإجابة - مادة: الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)
2		
3		
b)		$z'' - (1+i) = i(z - (1+i)) \dots\dots\dots 0.25$
2-a)		$\frac{z'' - 2}{z' - 2} = -i \dots\dots\dots 0.25$ $AM'M''$ est un triangle isocèle et rectangle en A $\dots\dots\dots 0.25$
b)		La droite d'équation : $x = 1 \dots\dots\dots 0.5$
<b>Quatrième exercice</b>		<b>6.5points</b>
Première partie :1-		Vérification $\dots\dots\dots 0.25$
2-		Dérivabilité de la fonction à droite en 0 $\dots\dots\dots 0.5$
3-		Pour chaque'une des 4 limites $\dots\dots\dots 0.25$ Pour chaque'une des deux interprétations $\dots\dots\dots 0.25$
4-		Le calcul de $f'(x)$ $\dots\dots\dots 0.25$ Variation de la fonction $\dots\dots\dots 0.25$ Tableau de variation $\dots\dots\dots 0.25$
5-		Le point d'inflexion est : $\left( e^2; \frac{e^2}{2} \right) \dots\dots\dots 0.5$
6-		Représentation graphique $\dots\dots\dots 0.5$
7-		Existence et unicité de $a_n$ et $1 < a_n < e \dots\dots\dots 0.25$ Existence et unicité de $b_n$ et $b_n > e \dots\dots\dots 0.25$
Deuxième partie :1-		$(\forall n \geq 3) b_n \geq n \dots\dots\dots 0.25$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty \dots\dots\dots 0.25$
2-a)		La suite $(a_n)_{n \geq 3}$ est décroissante $\dots\dots\dots 0.25$ La suite $(a_n)_{n \geq 3}$ est convergente $\dots\dots\dots 0.25$
b)		Encadrement de $\ln(a_n) \dots\dots\dots 0.25$ Dédution : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1 \dots\dots\dots 0.25$
c)		Dédution $\dots\dots\dots 0.5$
<b>Cinquième exercice</b>		<b>3.5points</b>
1-a)		L'encadrement de $F(x) \dots\dots\dots 0.5$
b)		$(\forall x \geq 1) e^{-x^2} \leq e^{-x} \dots\dots\dots 0.25$ Déduire que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0 \dots\dots\dots 0.25$
2-		Dérivabilité de $F \dots\dots\dots 0.25$ Calcul de $F'(x) \dots\dots\dots 0.25$
3-a)		Continuité de la fonction $G$ à gauche en $\frac{\pi}{2} \dots\dots\dots 0.25$ Toute solution plausible est acceptée.

الصفحة 3 3	NR25	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2011 - عناصر الإجابة - مادة: الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)
		$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0 \text{ donc.....}$ <p>Ou pour <math>\frac{\pi}{4} \leq x &lt; \frac{\pi}{2}</math> on a : <math>0 \leq G(x) = F(\tan x) \leq \tan(x)e^{-\tan x}</math> donc.....</p>
b)		<p>-Application du théorème de ROLLE :il existe <math>c_1 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[</math> tel que :</p> $G'(c_1) = (1 + \tan^2(c_1))F'(\tan c_1) = 0 \dots\dots\dots 0.25$ <p>-Il existe <math>c \in ]0, +\infty[</math> tel que <math>F'(c) = 0</math> (<math>c = \tan c_1</math>) .....0.25</p> <p>- <math>F(c) = \frac{e^{-2c^2}}{2c} \dots\dots\dots 0.25</math></p>
4-a)		<p>La fonction <math>H</math> est dérivable sur <math>]0, +\infty[</math></p> $\text{et } H'(x) = -\left(2 + \frac{1}{2x^2}\right)e^{-x^2} < 0 \dots\dots\dots 0.5$
b)		<p>La fonction <math>H</math> est une bijection(continue et strictement monotone) et <math>H(c) = 0</math> d'où l'unicité de <math>c</math> .....0.25</p> <p>Tableau de variation de <math>F</math> .....0.25</p>