★★

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية 2016

- الموضوع -

NS 24

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓ
ⴷ ⵓⵙⵎⵓⵜⵜⴳ ⴰⵣⵣⴰⵍⴰⵏ

المركز الوطني للتقويم
والامتحانات والتوجيه

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	المعامل	9

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنيات الجبرية.........................(3.5 ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالحسابيات...............................(3 ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالأعداد العقدية..........................(3.5 ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل..................................(7 ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل................................(3 ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول : (5.3 نقط)

نذكر أن $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ و أن $(\mathbb{C},+,\times)$ جسم تبادلي.

لكل (x,y) من $\mathbb{R}^2$ ، نضع: $M(x,y)=\begin{pmatrix}x+y&0&-2y\\0&0&0\\y&0&x-y\end{pmatrix}$ و $E=\{M(x,y)\ ;\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

0.5 | 1- بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(M_3(\mathbb{R}),+)$

0.5 | 2- تحقق أن:

$$(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2)\ (\forall (x',y')\in\mathbb{R}^2):\ M(x,y)\times M(x',y')=M(xx'-yy',xy'+yx')$$

5- نضع $E^*=E-\{M(0,0)\}$ ونعتبر التطبيق: $\varphi:\mathbb{C}^*\to E$ الذي يربط العدد العقدي $z=x+iy$ بالمصفوفة $M(x,y)$ من E ، حيث الزوج (x,y) من $\mathbb{R}^2$ ،

0.25 | أ) بين أن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$

0.75 | ب) استنتج أن $(E^*,\times)$ زمرة تبادلية و أن عنصرها المحايد هو $M(1,0)$

0.5 | 4- بين أن $(E,+,\times)$ جسم تبادلي.

3- نضع $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

0.5 | أ) أحسب $M(x,y)\times A$ من أجل $M(x,y)$ عنصر من E

0.5 | ب) استنتج أن كل عنصر من عناصر E لا يقبل مماثلا في $(M_3(\mathbb{R}),\times)$

التمرين الثاني:(5 نقط)

الجزء الأول: ليكن (a,b) عنصرا من $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ بحيث العدد **الأولي** 173 يقسم a^3+b^3

0.25 | 1- بين أن: $a^{171}\equiv -b^{171}\ [173]$ (لاحظ أن: $171=3\times 57$)

0.25 | 2- بين أن: 173 **يقسم** a إذا و فقط إذا كان 173 **يقسم** b

0.25 | 3- **نفترض أن** 173 **يقسم** a . بين أن 173 يقسم $a+b$

4- **نفترض أن** 173 **لا يقسم** a

0.5 | أ) باستعمال مبرهنة فيرما بين أن: $a^{172}\equiv b^{172}\ [173]$

0.5 | ب) بين أن: $a^{171}(a+b)\equiv 0\ [173]$

0.5 | ج) استنتج أن 173 يقسم $a+b$

الجزء الثاني: نعتبر في $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ المعادلة التالية: $(E)\quad x^3+y^3=173(xy+1)$

ليكن (x,y) عنصرا من $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ حلا للمعادلة (E) ؛ نضع: $x+y=173k$ حيث، $k \in \mathbb{N}^*$

-1 تحقق أن: $k(x-y)^2+(k-1)xy=1$ 0.25

-2 بين أن: $k=1$ ثم حل المعادلة (E) . 0.5

التمرين الثالث: (5.3 نقط)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد و ممنظم و موجه $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر نقطتين M_1 و M_2 من المستوى العقدي بحيث النقط O و M_1 و M_2 مختلفة مثنى مثنى وغير مستقيمية.

ليكن z_1 و z_2 لحقي M_1 و M_2 على التوالي و لتكن M النقطة التي لحقها z يحقق العلاقة : $z=\dfrac{2z_1z_2}{z_1+z_2}$

-1 أ) بين أن: $\dfrac{z_1-z}{z_2-z}\times\dfrac{z_2}{z_1}=-1$ 0.5

ب) استنتج أن النقطة M تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث OM_1M_2 0.5

-2 بين أنه إذا كانت $z_2=\overline{z_1}$ فإن M تنتمي إلى المحور الحقيقي. 0.5

-5 نفترض أن M_2 هي صورة M_1 بالدوران r الذي مركزه O و قياس زاويته α حيث α ينتمي إلى $]0,\pi[$

أ) احسب z_2 بدلالة z_1 و α 0.5

ب) استنتج أن النقطة M تنتمي إلى واسط القطعة $[M_1M_2]$ 0.5

-4 ليكن θ عددا حقيقيا **معلوما** من $]0,\pi[$

نفترض أن z_1 و z_2 هما حلا المعادلة : $6t^2-(e^{i\theta}+1)t+(e^{i\theta}-1)=0$

أ) بدون حساب z_1 و z_2 تحقق أن: $z=2\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$ 0.5

ب) أعط الصيغة المثلثية للعدد العقدي z بدلالة q. 0.5

التمرين الرابع:(7 نقط)

الجزء الأول:

-1 بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة $t \mapsto e^{-t}$ ، بين أنه لكل عدد حقيقي موجب قطعا x يوجد عدد حقيقي 0.5

θ محصور بين 0 و x بحيث : $e^{\theta}=\dfrac{x}{1-e^{-x}}$

-2 استنتج أن:

أ) $1-x<e^{-x}$; $(" x>0)$ 0.25

ب) $x+1<e^{x}$; $(" x>0)$ 0.25

ج) $0<\ln\left(\dfrac{xe^x}{e^x-1}\right)<x$; $(\forall x>0)$ 0.25

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي: $f(0)=1$ و $f(x)=\dfrac{xe^x}{e^x-1}$ إذا كان $x>0$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- أ) بين أن الدالة f متصلة على اليمين في 0 — 0.5

ب) بين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=0$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها. — 0.5

2- أ) بين أن: $x-\dfrac{x^2}{2}\leq -e^{-x}+1 \quad (\forall x\geq 0)$ (يمكنك استعمال نتيجة السؤال 2- أ) من الجزء الأول) — 0.25

ب) استنتج أن: $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6}\leq e^{-x}+x-1\leq \dfrac{x^2}{2} \quad (\forall x\geq 0)$ — 0.5

5- أ) تحقق أن: $\dfrac{f(x)-1}{x}=\dfrac{e^{-x}+x-1}{x^2}f(x) \quad (\forall x>0)$ — 0.5

ب) استنتج أن: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-1}{x}=\dfrac{1}{2}$ ثم أول النتيجة المحصل عليها. — 0.75

4- أ) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ و أن $f'(x)=\dfrac{e^x\left(e^x-1-x\right)}{\left(e^x-1\right)^2} \quad (\forall x>0)$ — 0.75

ب) استنتج أن الدالة f تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$. (يمكنك استعمال نتيجة السؤال 2- ب) من الجزء الأول) — 0.5

<u>الجزء الثالث:</u>

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي: $u_0>0$ و $u_{n+1}=\ln\left(f(u_n)\right)$ لكل عدد صحيح طبيعي n

1- بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي n لدينا: $u_n>0$ — 0.5

2- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تناقصية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة. (يمكنك استعمال نتيجة السؤال 2- ج) من الجزء الأول) — 0.5

5- بين أن 0 هو الحل الوحيد للمعادلة : $\ln\left(f(x)\right)=x$ ثم حدد نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ — 0.5

<u>التمرين الخامس:</u> (5 نقط)

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $I=]0,+\infty[$ بما يلي: $F(x)=\displaystyle\int_{\ln 2}^{x}\frac{1}{\sqrt{e^t-1}}dt$

1- أ) أدرس إشارة $F(x)$ لكل x من I — 0.5

ب) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال I و احسب $F'(x)$ لكل x من I. — 0.5

ج) بين أن الدالة F تزايدية قطعا على المجال I — 0.25

2- أ) باستعمال تقنية تغيير المتغير و ذلك بوضع: $u=\sqrt{e^t-1}$ ، بين أنه لكل x من I لدينا:

$$\int_{\ln 2}^{x}\frac{1}{\sqrt{e^t-1}}dt=2\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{\pi}{2}$$ — 0.5

ب) احسب: $\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ — 0.5

5- أ) بين أن F تقابل من المجال I نحو مجال J يتم تحديده. — 0.25

ب) حدد التقابل العكسي F^{-1} للتقابل F . — 0.5

انتهى

Yassine Mghazli

التمرين الاول

-1 $E \subset M_3(\mathbb{R})$ و $E \neq \varnothing$ (لأن $0_{M_3(\mathbb{R})} = M(0,0) \in E$)

و لدينا
$$\left(\forall \left(M(x,y), M(a,b)\right) \in E^2\right); M(x,y) - M(a,b) = \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+b & 0 & -2b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & a-b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x-a)+(y-b) & 0 & -2(y-b) \\ 0 & 0 & 0 \\ y-b & 0 & (x-a)-(y-b) \end{pmatrix}$$

$$= M(x-a, y-b) \in E$$

إذن

$$\boxed{E \text{ زمرة جزئية للزمرة } \left(M_3(\mathbb{R}), +\right)}$$

-2 لدينا
$$\left(\forall \left(M(x,y), M(x',y')\right) \in E^2\right); M(x,y) \times M(x',y') = \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'+y' & 0 & -2y' \\ 0 & 0 & 0 \\ y' & 0 & x'-y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x+y)(x'+y')-2yy' & 0 & -2y'(x+y)-2y(x'-y') \\ 0 & 0 & 0 \\ y(x'+y')+y'(x-y) & 0 & -2yy'+(x-y)(x'-y') \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} xx'+xy'+yx'-yy' & 0 & -2(xy'+yx') \\ 0 & 0 & 0 \\ xy'+yx' & 0 & xx'-yy'-xy'-yx' \end{pmatrix}$$

$$= M(xx'-yy', xy'+yx')$$

إذن

$$\boxed{\left(\forall \left(M(x,y), M(x',y')\right) \in E^2\right); M(x,y) \times M(x',y') = M(xx'-yy', xy'+yx')}$$

Yassine Mghazli

-3 أ) $z' = x' + iy'$ و $z = x + iy$ / $\left(\forall (z,z') \in (\mathbb{C}^*)^2\right); \exists! \left((x,y),(x',y') \in \left(\mathbb{R} - \{(0,0)\}\right)^2\right)$

لدينا $\varphi(z \times z') = \varphi\left((x+iy)(x'+iy')\right)$

$$= \varphi\left(xx' - yy' + i(xy' + yx')\right)$$

$$= M\left(xx' - yy', xy' + yx'\right)$$

$$= M(x,y) \times M(x',y')$$

$$= \varphi(z) \times \varphi(z')$$

إذن

$\boxed{\left(\forall (z,z') \in (\mathbb{C}^*)^2\right) \ \varphi(z \times z') = \varphi(z) \times \varphi(z')}$ و منه φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*, \times)$ نحو $(E, \times)$

ب) بما أن $(\mathbb{C}^*, \times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد 1 و φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*, \times)$ نحو $(E, \times)$

فإن $(\varphi(\mathbb{C}^*), \times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد $\varphi(1)$ و بما أن $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$ و $\varphi(1) = \varphi(1+0i) = M(1,0)$

فإن

$\boxed{(E^*, \times)}$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد $M(1,0)$

-4 لدينا $(E^*, \times)$ <u>زمرة تبادلية</u> و E زمرة جزئية للزمرة $(M_3(\mathbb{R}), +)$ إذن $(E, +)$ <u>زمرة تبادلية</u>

ولدينا حسب السؤال 2- E جزء مستقر من $(M_3(\mathbb{R}), \times)$ إذن $\times$ <u>توزيعي على</u> $+$ في E

نستنتج أن

$\boxed{(E, +, \times)}$ جسم تبادلي

-5 أ) لدينا $\left(\forall M(x,y) \in E\right); A \times M(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\left(\forall M(x,y) \in E\right); A \times M(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Yassine Mghazli

ب) نفترض أن ل $M(x,y)$ مماثلا في $(M_3(\mathbb{R}),\times)$ هو M^{-1}

$$A\times M(x,y)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow (A\times M(x,y))\times M^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times M^{-1}$$

$$\Rightarrow A\times(M(x,y)\times M^{-1})=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

و هذا تناقض ومنه

$\boxed{\text{جميع عناصر } E \text{ لا تقبل مقلوبا في } (M_3(\mathbb{R}),\times)}$

التمرين الثاني

الجزء الاول

-1 لدينا $a^3+b^3\equiv 0[173] \Leftrightarrow 173\,|\,a^3+b^3$ إذن $a^3\equiv -b^3[173]$ و منه $(a^3)^{57}\equiv(-b^3)^{57}[173]$

و بالتالي

$\boxed{a^{171}\equiv -b^{171}[173]}$

-2 لدينا 173 أولي و $173\,|\,a$ إذن $(173\,|\,a^3 \Leftrightarrow 173\,|\,a)$ و$(173\,|\,\mathrm{b}^3 \Leftrightarrow 173\,|\,\mathrm{b})$

و بما أن $173\,|\,a^3+b^3$ فإن $(173\,|\,a^3 \Leftrightarrow 173\,|\,\mathrm{b}^3)$

نستنتج أن

$\boxed{173\,|\,a \Leftrightarrow 173\,|\,\mathrm{b}}$

-3 لدينا $(173\,|\,a \Rightarrow 173\,|\,b)$ و $(173\,|\,a$ ومنه $(173\,|\,\mathrm{b}$ و $173\,|\,a)$

نستنتج أن

$\boxed{173\,|\,a+b}$

-4 أ) لدينا 173 لايقسم a إذن حسب-2 173لايقسم b ومنه حسب مبرهنة فرما الصغرى $a^{172}\equiv 1[173]$ و$b^{172}\equiv 1[173]$

نستنتج أن

$\boxed{a^{172}\equiv b^{172}[173]}$

ب) لدينا $a^{171}\equiv -b^{171}[173]$ و $a^{172}\equiv b^{172}[173]$ إذن $a^{172}\equiv -ba^{171}[173]$ ومنه

$\boxed{a^{171}(a+b)\equiv 0[173]}$

ج) بما أن 173 لايقسم a فإن 173 لايقسم a^{171} و بما أن 173 أولي فإن $173\wedge a^{171}=1$ و بما أن $173\,|\,a^{171}(a+b)$

فإن حسب مبرهنة كوص

$\boxed{173\,|\,a+b}$

Yassine Mghazli

الجزء الثاني

-1 لكل x و y و k من $\mathbb{N}^*$ لدينا :

$$\begin{cases} x+y=173k \\ x^3+y^3=173(xy+1) \end{cases} \Rightarrow (x^2-xy+y^2)173k=173(xy+1)$$

$$\Rightarrow k\left((x-y)^2+xy\right)=(xy+1)$$

$$\Rightarrow k(x-y)^2=1+xy(1-k)$$

$$\Rightarrow k(x-y)^2+(k-1)xy=1$$

إذن

$$\boxed{k(x-y)^2+(k-1)xy=1}$$

-2 نفترض أن $k\neq 1$ حسب السؤال السابق لدينا $k(x-y)^2+(k-1)xy=1$

إذن $(*)\,k(x-y)^2=1-(k-1)xy$

وبما أن x و y و k من $\mathbb{N}^*$ فإن $k\geq 2$ و $xy\geq 1$ و منه $(k-1)xy\geq 1$ ما يستلزم أن $k(x-y)^2\leq 0$

أي أن $x=y$ المعادلة $(*)$ تصبح $(k-1)xy=1$ ما يستلزم أن $k-1=x=y=1$ و هذا تناقض مع كون

$x+y=173k\geq 173$ إذن الافتراض الأول خاطئ وعكسه هو الصحيح: $\boxed{k=1}$

لدينا

$$(E)\Rightarrow \begin{cases} (x-y)^2=1 \\ x+y=173 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{cases} (x-y)=1 \\ x+y=173 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} (x-y)=-1 \\ x+y=173 \end{cases} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{cases} 2x=174 \\ 2y=172 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} 2x=172 \\ 2y=174 \end{cases} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{cases} x=87 \\ y=86 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x=86 \\ y=87 \end{cases} \right)$$

وعكسا لدينا $87^3+86^3=(86+87)(87^2-87\times 86+86^2)=173(87+86^2)=173(1+86\times 87)$

مجموعة حلول المعادلة (E) هي إذن

$$\boxed{S=\{(87,86);(86,87)\}}$$

Yassine Mghazli

التمرين الثالث

1- أ) لدينا $\frac{z_1-z}{z_2-z}\times\frac{z_2}{z_1}=\frac{z_1z_2-zz_2}{z_1z_2-zz_1}=\frac{\frac{1}{2}\left(z\left(z_1+z_2\right)-2zz_2\right)}{\frac{1}{2}\left(z\left(z_1+z_2\right)-2zz_1\right)}=\frac{z\left(z_1-z_2\right)}{z\left(z_2-z_1\right)}=-1$

إذن

$$\boxed{\frac{z_1-z}{z_2-z}\times\frac{z_2}{z_1}=-1}$$

ب) بما أن النقط O و M و M_1 و M_2 غير مستقيمية و $\frac{z_1-z}{z_2-z}\times\frac{z_2-0}{z_1-0}\in\mathbb{R}$ فإنها نقط متداورة ومنه

$$\boxed{\text{النقطة } M \text{ تنتمي للدائرة المحيطة بالمثلث } OM_1M_2}$$

2- لدينا $\overline{z}=\frac{\overline{2z_1z_2}}{\overline{z_1+z_2}}=\frac{2\overline{z_1}\,\overline{z_2}}{\overline{z_1}+\overline{z_2}}=\frac{2z_2z_1}{z_2+z_1}=\frac{2z_2z_1}{z_2+z_1}=z$ لأن $\left(z_2=\overline{z_1}\ \ z_1=\overline{z_2}\right)$ و

إذن $\overline{z}=z$ ومنه $z\in\mathbb{R}$ نستنتج أن

$$\boxed{M \text{ تنتمي للمحور الحقيقي}}$$

3- أ) الصيغة العقدية الدوران الذي مركزه O و زاويته α هي: $z'=e^{i\alpha}z$ وبما أن صورة M_1 بهذا الدوران هي M_2 فإن

$$\boxed{z_2=e^{i\alpha}z_1}$$

ب) بما أن z_1 و z_2 مترافقين فإن M_1 و M_2 مثماثلين بالنسبة للمحور الحقيقي و منه منتصف القطعة $\left[M_1M_2\right]$ ينتمي للمحور الحقيقي

و بما أن $OM_1=OM_2$ فإن واسط القطعة $\left[M_1M_2\right]$ هو المحور الحقيقي نستنتج حسب السؤال 2- أن

$$\boxed{M \text{ تنتمي لواسط القطعة } \left[M_1M_2\right]}$$

4- أ) z_1 و z_2 حلي المعادلة $6t^2-\left(e^{i\theta}+1\right)t+\left(e^{i\theta}-1\right)=0$ إذن $z_1+z_2=\frac{e^{i\theta}+1}{6}$ و $z_1z_2=\frac{e^{i\theta}-1}{6}$

إذن $z=\frac{2z_1z_2}{z_1+z_2}=2\frac{\frac{e^{i\theta}-1}{6}}{\frac{e^{i\theta}+1}{6}}=2\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$ و منه: $\boxed{z=2\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}}$

Yassine Mghazli

ب) لدينا
$$z=2\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}=2\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}=2\frac{2i\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}}=2i\tan\frac{\theta}{2}$$

وبما أن $\theta\in]0,\pi[$ فإن $\frac{\theta}{2}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ و منه $\tan\frac{\theta}{2}>0$ نستنتج أن الشكل المثلثي ل z هو

$$\boxed{z=\left[2\tan\frac{\theta}{2},\frac{\pi}{2}\right]}$$

التمرين الرابع

الجزء الأول

1- لكل x من $]0,+\infty[$ الدالة $\varphi:t\to e^{-t}$ متصلة على $[0,x]$ و قابلة للاشتقاق على $]0,x[$ إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية

يوجد θ من $]0,x[$ بحيث $\varphi'(\theta)=\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}$ و بالتعويض نحصل على $\frac{e^{-x}-1}{x}=-e^{-\theta}$ ومنه $\frac{x}{1-e^{-x}}=e^{\theta}$

$$\boxed{(\forall x\in]0+\infty+\infty[);(\exists\theta\in]0,x[)/e^{\theta}=\frac{x}{1-e^{-x}}}$$

2- أ) و ب) لدينا
$$(\forall x>0);0<\theta<x\Rightarrow1<e^{\theta}<e^{x}\Rightarrow1<\frac{x}{1-e^{-x}}<e^{x}$$
$$\overset{(1-e^{-x}>0)}{\Longrightarrow}1-e^{-x}<x<e^{x}(1-e^{-x})$$
$$\Rightarrow\begin{cases}1-e^{-x}<x\\x<e^{x}-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1-x<e^{-x}\\x+1<e^{x}\end{cases}$$

إذن

$$\boxed{(\forall x>0);x+1<e^{x}\quad\text{و}\quad(\forall x>0);1-x<e^{-x}}$$

ج) لدينا
$$(\forall x>0);0<\theta<x\Rightarrow1<e^{\theta}<e^{x}\Rightarrow1<\frac{x}{1-e^{-x}}<e^{x}$$
$$\Rightarrow1<\frac{xe^{x}}{e^{x}-1}<e^{x}\Rightarrow0<\ln\left(\frac{xe^{x}}{e^{x}-1}\right)<x$$

(لأن الدالة $\ln$ تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$) و منه

$$\boxed{(\forall x>0);0<\ln\left(\frac{xe^{x}}{e^{x}-1}\right)<x}$$

Yassine Mghazli

الجزء الثاني

1- أ) لدينا $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{xe^x}{e^x-1} = \lim_{x\to 0} e^x \frac{1}{\frac{e^x-1}{x}} = 1\times\frac{1}{1} = 1 = f(1)$

$\boxed{\text{إذن } f \text{ متصلة على اليمين في } 0}$

ب) لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x)-x = \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^x}{e^x-1} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}} = 0$ لأن $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} = +\infty$

$\boxed{\text{إذن } \lim_{x\to+\infty} f(x)-x=0 \text{ ومنه ل } (C) \text{ مقارب مائل بجوار } +\infty \text{ معادلته } y=x}$

2- أ) لدينا حسب 2-أ)من الجزء الأول: $(\forall t>0);1-t<e^{-t}$ إذن $(\forall t\geq 0);1-t\leq e^{-t}$

إذن $(\forall x\geq 0);\int_0^x (1-t)\,dt \leq \int_0^x e^{-t}dt$

يستلزم $(\forall x\geq 0);\left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^x \leq \left[-e^{-t}\right]_0^x$

ومنه

$$\boxed{(\forall x\geq 0);x-\frac{x^2}{2}\leq -e^{-x}+1}$$

ب) لدينا

$$(\forall x\geq 0);x-\frac{x^2}{2}\leq -e^{-x}+1 \Rightarrow (\forall x\geq 0);\begin{cases} e^{-x}+x-1\leq \frac{x^2}{2} \\ \int_0^x t-\frac{t^2}{2}dt \leq \int_0^x \left(-e^{-t}+1\right)dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\forall x>0);\begin{cases} e^{-x}+x-1\leq \frac{x^2}{2} \\ \left[\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6}\right]_0^x \leq \left[e^{-t}+t\right]_0^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\forall x>0);\begin{cases} e^{-x}+x-1\leq \frac{x^2}{2} \\ \frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6} \leq e^{-x}+x-1 \end{cases}$$

Yassine Mghazli

ومنه

$$\boxed{(\forall x>0);\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\le e^{-x}+x-1\le\frac{x^2}{2}}$$

3- أ) لدينا

$$(\forall x>0);\frac{f(x)-1}{x}=\frac{\frac{xe^x}{e^x-1}-1}{x}$$

$$=\frac{xe^x-e^x-1}{x(e^x-1)}$$

$$=\frac{x}{x^2(e^x-1)}\times e^x\left(x-1-e^{-x}\right)$$

$$=\frac{f(x)}{x^2}\left(x-1-e^{-x}\right)$$

إذن

$$\boxed{(\forall x>0);\frac{f(x)-1}{x}=\frac{x-1-e^{-x}}{x^2}f(x)}$$

ب) لدينا

$$(\forall x>0);\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\le e^{-x}+x-1\le\frac{x^2}{2}\Rightarrow(\forall x>0);\frac{1}{2}-\frac{x}{6}\le\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}\le\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow(\forall x>0);\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{6}\right)f(x)\le\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}f(x)\le\frac{1}{2}f(x)$$

$$\Rightarrow(\forall x>0);\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{6}\right)f(x)\le\frac{f(x)-1}{x}\le\frac{1}{2}f(x)$$

وبما أن $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{6}\right)f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{2}f(x)=\frac{1}{2}f(0)=\frac{1}{2}$

فإن

$$\boxed{\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-1}{x}=\frac{1}{2}\ \text{ومنه}\ f\ \text{قابلة للاشتقاق على اليمين في}\ 0\ \text{و}\ f_d'(0)=\frac{1}{2}}$$

4- أ) الدوال $x\to x$ و $x\to e^x$ و $x\to1$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و بالخصوص على $]0,+\infty[$ إذن الدالتين $x\to xe^x$ و $x\to e^x-1$ قابلتين للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و بما أن $(\forall x>0);e^x-1\neq0$

فإن الدالة $x\to\frac{xe^x}{e^x-1}$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

Yassine Mghazli

خلاصة

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

لدينا
$$(\forall x>0);\ f'(x)=\frac{\left(e^x+xe^x\right)\left(e^x-1\right)-xe^xe^x}{\left(e^x-1\right)^2}$$
$$=\frac{e^x}{\left(e^x-1\right)^2}\left(\left(x+1\right)\left(e^x-1\right)-xe^x\right)$$
$$=\frac{e^x}{\left(e^x-1\right)^2}\left(xe^x-x+e^x-1-xe^x\right)$$
$$=\frac{e^x}{\left(e^x-1\right)^2}\left(e^x-x-1\right)$$

إذن

$$\boxed{(\forall x>0);\ f'(x)=\frac{e^x}{\left(e^x-1\right)^2}\left(e^x-x-1\right)}$$

ب) حسب السؤال 2- ب) من الجزء الأول لدينا $(\forall x>0);x+1<e^x$

إذن $(\forall x>0);e^x-x-1>0$ و منه $(\forall x>0);\ f'(x)>0$

نستنتج أن الدالة f تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

الجزء الثالث

1- برهان بالترجع على العلاقة $"(\forall n\in\mathbb{N});u_n>0"$

لدينا $u_0>0$ إذن العلاقة صحيحة من اجل $n=0$

ليكن n من $\mathbb{N}$ نفترض أن $u_n>0$ و نبين ان $u_{n+1}>0$

$n\in\mathbb{N};u_n>0\Rightarrow f\left(u_n\right)>f\left(0\right)\Rightarrow\ln\left(f\left(u_n\right)\right)>\ln\left(f\left(0\right)\right)$ (لأن f و $\ln$ تزايديتين قطعا على $]0,+\infty[$
(

و بما أن $\ln\left(f\left(0\right)\right)=\ln\left(1\right)=0$ فإن $u_{n+1}>0$

حسب مبدأ الترجع نستنتج أن

$$\boxed{(\forall n\in\mathbb{N});u_n>0}$$

Yassine Mghazli

-2 لدينا حسب السؤال 2- ج) $(\forall x>0);0<\ln\left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right)<x$

وبما أن $(\forall n\in\mathbb{N});u_n>0$ فإن $(\forall n\in\mathbb{N});0<\ln\left(\frac{u_ne^{u_n}}{e^{u_n}-1}\right)<u_n$

نستنتج أن $(\forall n\in\mathbb{N});0<\ln\left(f\left(u_n\right)\right)<u_n$ وبالتالي $(\forall n\in\mathbb{N});0<u_{n+1}<u_n$

إذن

$\boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ تناقصية قطعا و بما أنها مصغورة ب } 0 \text{ فهي إذن متقاربة}}$

-3 لدينا $(\forall x>0);e^x>x+1\Leftrightarrow e^x-1>x\Leftrightarrow\frac{x}{e^x-1}<1\Leftrightarrow\frac{xe^x}{e^x-1}<e^x\Leftrightarrow f(x)<e^x\Leftrightarrow\ln\left(f(x)\right)<x$

و $\ln\left(f(0)\right)=0$

إذن $\begin{cases}(\forall x>0);\ln\left(f(x)\right)\neq x\\ \ln\left(f(0)\right)=0\end{cases}$ و منه

$\boxed{0 \text{ هو الحل الوحيد للمعادلة } \ln\left(f(x)\right)=x}$

المتتالية (u_n) متقاربة و الدالة $\ln\circ f$ متصلة على $]0,+\infty[$ وتحقق $\ln\circ f\left(]0,+\infty[\right)\subset]0,+\infty[$

إذن نهايتها l تحقق المعادلة $\ln\left(f(l)\right)=l$ التي تقبل حلا وحيدا هو 0 نستنتج أن

$$\boxed{\lim u_n=0}$$

التمرين الخامس

-1 أ) لدينا $(\forall t\in]0,+\infty[);\frac{1}{\sqrt{e^t-1}}>0$

إذن $(\forall x\in]0,\ln 2[);\int_{\ln 2}^{x}\frac{1}{\sqrt{e^t-1}}dt<0$ و $(\forall x\in]\ln 2,+\infty[);\int_{\ln 2}^{x}\frac{1}{\sqrt{e^t-1}}dt>0$

و منه إشارة $F(x)$ كما يلي

$\boxed{F(x) \text{ موجبة قطعا على المجال }]\ln 2,+\infty[}$

$\boxed{F(x) \text{ سالبة قطعا على المجال }]0,\ln 2[\text{ و } F(\ln 2)=0}$

Yassine Mghazli

ب) الدالة F هي أصلية الدالة $x \to \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}$ على $]0,+\infty[$ و التي تنعدم عند $\ln 2$

إذن F قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا

$$\boxed{(\forall x \in]0,+\infty[);F^{'}(x)=\frac{1}{\sqrt{e^x-1}}}$$

ج) لدينا $(\forall x \in]0,+\infty[);F^{'}(x)=\frac{1}{\sqrt{e^x-1}}>0$ إذن

$$\boxed{\text{الدالة } F \text{ تزايدية قطعا على }]0,+\infty[}$$

2- أ) بوضع $u=\sqrt{e^t-1}$ يكون لدينا

$$\begin{cases} du=\frac{e^t}{2u}dt=\frac{u^2+1}{2u}dt \Leftrightarrow dt=\frac{2u}{u^2+1}du \\ t=x \Leftrightarrow u=\sqrt{e^x91} \\ t=\ln 2 \Leftrightarrow u=1 \end{cases}$$

ومنه

$$\int_{\ln 2}^{x}\frac{1}{\sqrt{e^t-1}}dt=\int_{1}^{\sqrt{e^x-1}}\frac{1}{u}\frac{2u}{u^2+1}du=\int_{1}^{\sqrt{e^x-1}}\frac{2}{u^2+1}du$$

$$=2[arc\tan]_1^{\sqrt{e^x-1}}=2\left(arc\tan\left(\sqrt{e^x-1}\right)-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=2arc\tan\left(\sqrt{e^x-1}\right)-\frac{\pi}{2}$$

إذن

$$\boxed{\int_{\ln 2}^{x}\frac{1}{\sqrt{e^t-1}}dt=2arc\tan\left(\sqrt{e^x-1}\right)-\frac{\pi}{2}}$$

ب) لدينا $\lim_{x\to 0^+}F(x)=\lim_{x\to 0^+}2arc\tan\left(\sqrt{e^x-1}\right)-\frac{\pi}{2}=2\arctan(0)-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}$

و $\lim_{x\to +\infty}F(x)=\lim_{x\to +\infty}2arc\tan\left(\sqrt{e^x-1}\right)-\frac{\pi}{2}=2\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

Yassine Mghazli

ومنه

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x)=\frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0^+} F(x)=-\frac{\pi}{2}}$$

3- أ) F قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ إذن متصلة عليه و بما أنها تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

فهي إذن تقابل من $]0,+\infty[$ نحو $F(]0,+\infty[)$

و لدينا $F(]0,+\infty[)=\left]\lim_{x\to 0^+}\mathrm{F}(x),\lim_{x\to+\infty} F(x)\right[=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

إذن

$$\boxed{F \text{ تقابل من }]0,+\infty[\text{ نحو } \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}$$

ب) $(\forall y\in]0,+\infty[);\left(\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)\ F(y)=x \Leftrightarrow 2\arctan\left(\sqrt{e^y-1}\right)-\frac{\pi}{2}=x$

$$\Leftrightarrow \arctan\left(\sqrt{e^y-1}\right)=\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{e^y-1}=\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow e^y=1+\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow y=\ln\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

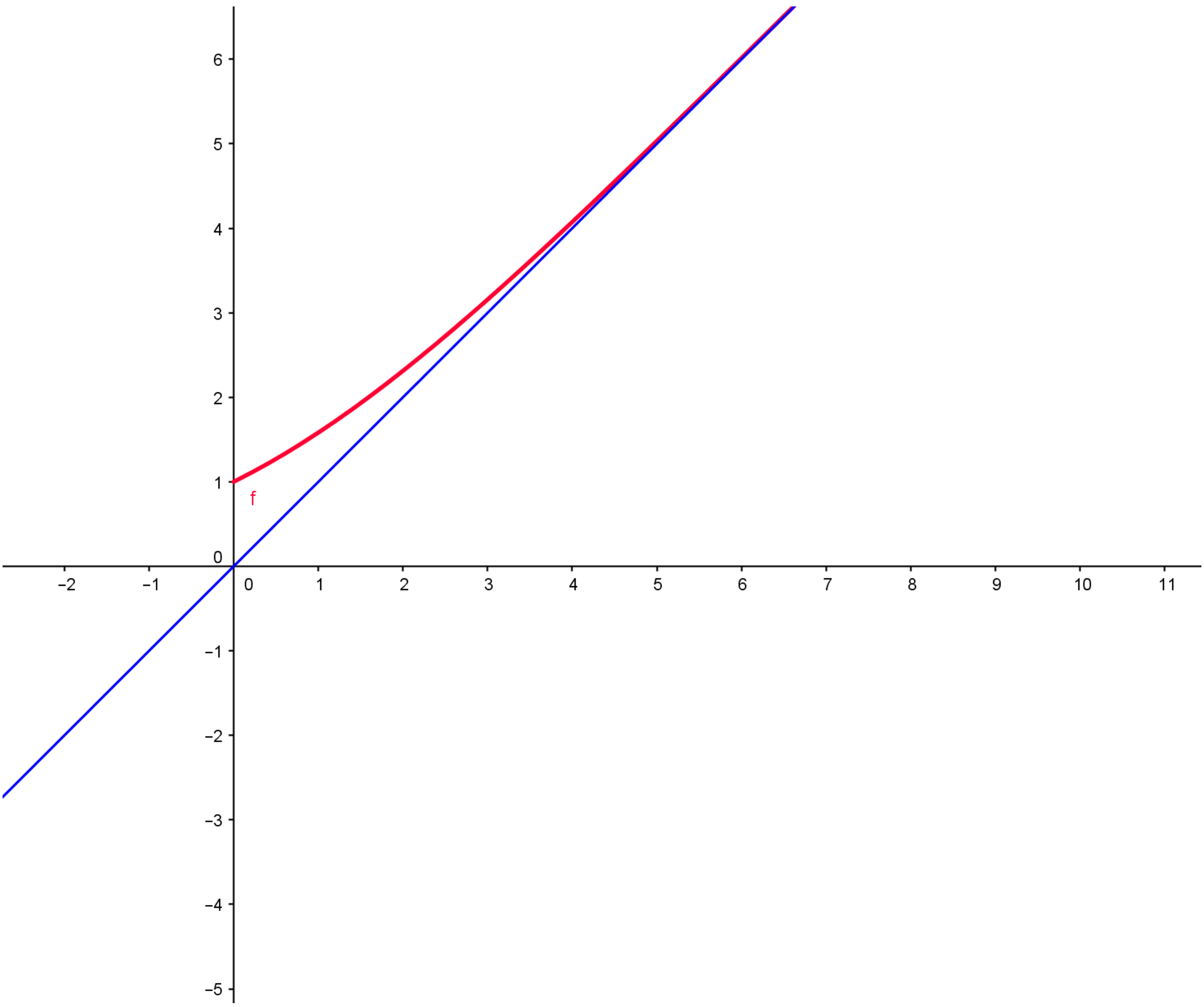
ومنه

$$\boxed{F \text{ تقابل من }]0,+\infty[\text{ نحو } \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\quad \text{و} \quad \forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[;F^{-1}(x)=\ln\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)}$$

Yassine Mghazli

إضافة

مبيان الدالة f



Yassine Mghazli

مبيان الدالة F