★★

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2017
- الموضوع -

NS 22

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	3
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها	المعامل	7

تعليمات عامة

- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة ؛
- يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان حسب الترتيب الذي يناسبه ؛
- ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة .

مكونات الموضوع

- يتكون الموضوع من ثلاثة تمارين و مسألة، مستقلة فيما بينها، و تتوزع حسب المجالات كما يلي:

التمرين الأول	الهندسة الفضائية	3 نقط
التمرين الثاني	حساب الاحتمالات	3 نقط
التمرين الثالث	الأعداد العقدية	3 نقط
المسألة	دراسة دالة عددية و حساب التكامل و المتتاليات العددية	11 نقطة

- بالنسبة للمسألة ، $\ln$ يرمز لدالة اللوغاريتم النبيري.

التمرين الأول : (3 نقط)

نعتبر، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، المستوى (P) المار من النقطة $A(0\ ,\ 1\ ,\ 1)$ و $\vec{u}(1\ ,\ 0\ ,\ -1)$ متجهة منظمية عليه و الفلكة (S) التي مركزها النقطة $\Omega\,(0\ ,\ 1\ ,\ -1)$ و شعاعها $\sqrt{2}$

1) أ- بين أن $x - z + 1 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (P) — 0.5

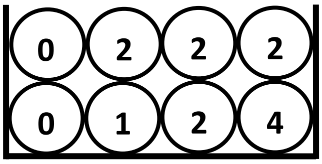
ب- بين أن المستوى (P) مماس للفلكة (S) و تحقق من أن $B(-1\,,1\,,0)$ هي نقطة التماس. — 0.75

2) أ- حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) المار من النقطة A و العمودي على المستوى (P) — 0.25

ب- بين أن المستقيم (Δ) مماس للفلكة (S) في النقطة $C\left(1\ ,\ 1\ ,0\right)$ — 0.75

3) بين أن $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB} = 2\vec{k}$ و استنتج مساحة المثلث OCB — 0.75

التمرين الثاني : (3 نقط)



يحتوي صندوق على ثماني كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس و تحمل كل واحدة منها عددا كما هو مبين في الشكل جانبه.
نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من الصندوق.

1) نعتبر الحدث A : " من بين الكرات الثلاث المسحوبة لا توجد أية كرة تحمل العدد 0 ". — 1.5

و الحدث B : " جداء الأعداد التي تحملها الكرات الثلاث المسحوبة يساوي 8 ".

بين أن $p(A) = \dfrac{5}{14}$ و أن $p(B) = \dfrac{1}{7}$

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بجداء الأعداد التي تحملها الكرات الثلاث المسحوبة.

أ- بين أن $p(X = 16) = \dfrac{3}{28}$ — 0.5

ب- الجدول جانبه يتعلق بقانون احتمال المتغير العشوائي X — 1
أتمم ملء الجدول بعد نقله على ورقة تحريرك معللا أجوبتك.

x_i	0	4	8	16
$p(X = x_i)$				$\dfrac{3}{28}$

التمرين الثالث : (3 نقط)

نعتبر العددين العقديين a و b بحيث $a = \sqrt{3} + i$ و $b = \sqrt{3} - 1 + \left(\sqrt{3} + 1\right) i$

1) أ- تحقق من أن $b = (1 + i)a$ — 0.25

ب- استنتج أن $|b| = 2\sqrt{2}$ و أن $\arg b \equiv \dfrac{5\pi}{12}\ [2\pi]$ — 0.5

ج- استنتج مما سبق أن $\cos\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ — 0.5

2) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\ \vec{u}\ ,\ \vec{v}\right)$

نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقاهما على التوالي هما a و b و النقطة C التي لحقها c بحيث $c = -1 + i\sqrt{3}$

أ- تحقق من أن $c = i\,a$ و استنتج أن $OA = OC$ و أن $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ — 0.75

ب- بين أن النقطة B هي صورة النقطة A بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{OC}$ — 0.5

ج- استنتج أن الرباعي $OABC$ مربع . — 0.5

المسألة : (11 نقطة)

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=x^2+x-2+2\ln x$

0.25 1) تحقق من أن $g(1)=0$

1 2) انطلاقا من جدول تغيرات الدالة g جانبه :

بين أن $g(x)\le 0$ لكل x من المجال $]0\,,1]$

و أن $g(x)\ge 0$ لكل x من المجال $[1\,,+\infty[$

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x+\left(1-\dfrac{2}{x}\right)\ln x$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة : $1\ cm$)

0.5 1) بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ و أول هندسيا النتيجة.

0.25 2) أ- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

0.75 ب- بين أن المنحنى (C) يقبل بجوار $+\infty$ ، فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$

1 3) أ- بين أن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$

0.75 ب- بين أن الدالة f تناقصية على المجال $]0\,,1]$ و تزايدية على المجال $[1\,,+\infty[$

0.25 ج- ضع جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0,+\infty[$

0.5 4) أ- حل في المجال $]0,+\infty[$ المعادلة $\left(1-\dfrac{2}{x}\right)\ln x=0$

0.5 ب- استنتج أن المنحنى (C) يقطع المستقيم (D) في نقطتين يتم تحديد زوج إحداثيتي كل منهما.

0.75 ج- بين أن $f(x)\le x$ لكل x من المجال $[1\,,2]$ واستنتج الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (D) على $[1\,,2]$

1 5) أنشئ ، في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$، المستقيم (D) و المنحنى (C) (نقبل أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف وحيدة أفصولها محصور بين $2{,}4$ و $2{,}5$)

0.5 6) أ- بين أن $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx=\frac{1}{2}(\ln 2)^2$

0.25 ب- بين أن الدالة $H:x\mapsto 2\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto \dfrac{2}{x}-1$ على المجال $]0,+\infty[$

0.5 ج- باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن $\displaystyle\int_1^2\left(\frac{2}{x}-1\right)\ln x\,dx=(1-\ln 2)^2$

0.5 د- احسب ب cm^2 ، مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و المستقيم (D) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=2$

III) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=\sqrt{3}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل n من $I\!N$

0.5 1) بين بالترجع أن $1\le u_n\le 2$ لكل n من $I\!N$

0.5 2) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية (يمكنك استعمال نتيجة السؤال II) 4) ج-)

0.75 3) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و حدد نهايتها.

01.

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر المستوى (P) المار من النقطة $A(0,1,1)$ و $\vec{u}(1,0-1)$ متجهة منظمية عليه و الفلكة (S) التي مركزها $\Omega(0,1,-1)$ و شعاعها $\sqrt{2}$.

01.

أ- نبين أن : $x-z+1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (P) .

طريقة 1 :

بما أن : المستوى (P) المار من النقطة $A(0,1,1)$ و $\vec{u}(1,0-1)$ متجهة منظمية عليه فإن :

$$M(x,y,z)\in(P)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{u}=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow x\times1+(y-1)\times0+(z-1)\times(-1)=0$$

$$\Leftrightarrow x-z+1=0$$

خلاصة: $x-z+1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (P) .

طريقة 2 :

- المتجهة $\vec{u}(1,0,-1)$ متجهة منظمية ل (P) إذن معادلة ديكارتية له هي على شكل $1x+0y-1z+d=0$.
- النقطة $A(0,1,1)\in(P)$ فإن : $1\times0+0\times1-1+d=0$ و منه : $d=1$.

خلاصة: $x-z+1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (P) .

ب- نبين أن المستوى (P) مماس للفلكة (S) و نتحقق بأن النقطة $B(-1,1,0)$ هي نقطة التماس .

- نبين أن المستوى (P) مماس للفلكة (S)

لهذا نحسب $d(\Omega,(P))$ المسافة بين النقطة Ω مركز الفلكة و المستوى (P) .

لدينا : $d(\Omega,(P))=\dfrac{|0+0+1+1|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

ونعلم أن شعاع الفلكة (S) هو $r=\sqrt{2}$ ومنه $d(\Omega,(P))=r$.

خلاصة 1 : المستوى (P) مماس للفلكة (S) .

- نتحقق بأن النقطة $B(-1,1,0)$ هي نقطة التماس .

لهذا نبين أن $B\in(S)\cap(P)$ أي نبين أن : $B\in(S)$ (أي $\Omega B=\sqrt{2}$) و نبين أن $B\in(P)$.

- $\overrightarrow{\Omega B}(-1,0,1)$ ومنه $\Omega B=\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}$ و منه $B\in(S)$.
- لدينا : $1\times(-1)+0\times1-1\times0+1=0$ إذن : $B\in(P)$

و منه : $B\in(S)\cap(P)$.

خلاصة 2 : النقطة $B(-1,1,0)$ هي نقطة التماس .

02. ..

أ- نحدد تمثيل بارامتريا للمستقيم (Δ) المار من النقطة A والعمودي على المستوى (P) .

✓ لدينا المتجهة : $\vec{u}(1,0,-1)$ موجهة ل (Δ) لأنها منظمية على المستوى (P) و $A(0,1,1)\in(\Delta)$

✓ تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) هو : $t\in\mathbb{R}$; $(\Delta)\ :\ \begin{cases} x=0+1\times t=t \\ y=1+0\times t=1 \\ z=1-1\times t=1-t \end{cases}$

خلاصة : تمثيل بارامتريا للمستقيم (Δ) هو : $t\in\mathbb{R}$; $(\Delta)\ :\ \begin{cases} x=t \\ y=1 \\ z=1-t \end{cases}$.

ب- نبين أن : المستقيم (Δ) مماس للفلكة (S) في النقطة $C(1,1,0)$.

✓ نحدد معادلة ديكارتية للفلكة (S) : $(S):(x-0)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=\sqrt{2}^2=2$.

✓ نحدد تقاطع الفلكة (S) و المستقيم (Δ) .

لدينا :

$$M(x,y,z)\in(S)\cap(\Delta)\Leftrightarrow\begin{cases} M\in(S) \\ M\in(\Delta) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x^2+(y-1)^2+(z+1)^2-2=0 \\ \begin{cases} x=t \\ y=1 \\ z=1-t \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} t^2+(1-1)^2+(1-t+1)^2-2=0 \\ \begin{cases} x=t \\ y=1 \\ z=1-t \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 2t^2-4t+2=2(t-1)^2=0 \\ \begin{cases} x=t \\ y=1 \\ z=1-t \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} t=1 \\ \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases} \end{cases}$$

و منه : المستقيم (Δ) و الفلكة (S) يتقاطعان في نقطة وحيدة هي $C(1,1,0)$.

خلاصة : المستقيم (Δ) مماس للفلكة (S) في النقطة $C(1,1,0)$.

ملحوظة : هناك طريقة أخرى يمكن أن نحسب $d(\Omega,(\Delta))$ (مسافة المركز Ω عن المستقيم و ذلك بحساب $d(\Omega,(\Delta))=\dfrac{\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$)

و نتحقق أن $d(\Omega,(\Delta))=r=\sqrt{2}$ ثم نتحقق أن $C\in\Omega$ و $C\in(\Delta)$.

.03 نبين أن : $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}=2\vec{k}$

- لدينا : $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{0C}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ و منه $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\0&0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&-1\\0&0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}\vec{k}=0\vec{i}-0\vec{j}+2\vec{k}=2\vec{k}$.

خلاصة : $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}=2\vec{k}$

- مساحة المثلث OCB :

لدينا : $S_{OBC}=\frac{1}{2}\times\|\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}\|=\frac{1}{2}\|2\vec{k}\|=\frac{1}{2}\times 2=1$

و بالتالي : مساحة المثلث OBC هي $S_{OBC}=1\ u.a$ (حسب وحدة المساحة)

.02

يحتوي صندوق: على 8 كرات أربع كرات تحمل رقم 2 وكرة واحدة تحمل رقم 1 و كرة واحدة تحمل رقم 4 ؛ لا يمكن التميز بين الكرات باللمس و نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من الصندوق .

.01 ليكن

✓ الحدث A : " من بين الكرات الثلاث المسحوبة لا توجد أية كرة تحمل العدد 0 "

✓ الحدث B " جداء الأعداد التي تحملها الكرات الثلاث المسحوبة يساوي 8 "

❖ نبين أن : $p(A)=\frac{5}{14}$.

✓ عدد السحبات الممكنة (أي $card\Omega$) :

سحب ثلاث كرات في آن واحد من بين 8 كرات يمثل تأليفة ل 3 من بين 8 .ومنه $card\Omega=C_8^3=\dfrac{8\times7\times\cancel{6}}{\cancel{1\times2\times3}}=56$

إذن : $card\Omega=C_8^3=56$

✓ عدد السحبات التي نريد أن تتحقق (أي $cardA$) :

الحدث A نعبر عنه أيضا بما يلي : A " الكرات الثلاث المسحوبة من بين الكرات التي تحمل الأعداد ① أو ② أو ④ "

و نعلم أن عدد هاته الكرات عددها هو 6 كرات .

إذن سحب ثلاث كرات في آن واحد من بين 6 كرات يمثل تأليفة ل 3 من بين 6 و منه $cardA=C_6^3=\dfrac{\cancel{6}\times5\times4}{\cancel{1\times2\times3}}=20$

و منه : $cardA=C_6^3=20$

ومنه : $p(A)=\dfrac{cardA}{card\Omega}=\dfrac{C_6^3}{C_8^3}=\dfrac{4\times5}{8\times7}=\dfrac{5}{14}$.

خلاصة : $p(A)=\dfrac{5}{14}$

❖ نبين أن : $p(B)=\frac{1}{7}$.

✓ عدد السحبات التي نريد أن تتحقق (أي $cardB$) :

الحدث B نعبر عنه أيضا بما يلي : A " (الكرات الثلاث المسحوبة من بين الكرات التي تحمل العدد ②) أو (كرة تحمل العدد ① و كرة تحمل العدد ② و كرة تحمل العدد ④) "

- الكرات الثلاث المسحوبة من بين الكرات التي تحمل العدد ② .
أي سحب ثلاث كرات في آن واحد من بين 4 كرات (التي تحمل العدد ②) يمثل تأليفة ل 3 من بين 4 وهي تتم ب $C_4^3 = C_4^1 = 4$ كيفيات مختلفة .
- كرة تحمل العدد ① و كرة تحمل العدد ② و كرة تحمل العدد ④) " وهي تتم ب $C_1^1 \times C_4^1 \times C_1^1 = 1\times 4\times 1 = 4$ كيفيات.
- ومنه $\text{card}B = C_4^3 + C_1^1\times C_4^1\times C_1^1 = 4+4 = 8$

ومنه : $p(B) = \dfrac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \dfrac{C_4^3 + C_1^1\times C_4^1\times C_1^1}{C_8^3} = \dfrac{4+4}{8\times 7} = \dfrac{\cancel{8}}{\cancel{8}\times 7} = \dfrac{1}{7}$.

خلاصة : $p(B) = \dfrac{1}{7}$

01. ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بجداء الأعداد التي تحملها الكرات الثلاث المسحوبة .

أ- نبين أن : $p(X=16) = \dfrac{3}{28}$.

✓ الحدث $(X=16)$ يمثل الحدث " الكرات الثلاث المسحوبة من بينها كرتين تحملان العدد ② و كرة واحدة تحمل رقم ④ "

- سحب كرتين تحملان العدد ② من بين 4 كرات وهي تتم ب $C_4^2 = \dfrac{4\times 3}{1\times 2} = 6$ كيفيات مختلفة .
- كرة واحدة تحمل رقم ④ من كرة واحدة وهي تتم ب $C_1^1 = 1$ (بكيفية واحدة فقط)
- و منه : $\text{card}(X=16) = C_4^2 \times C_1^1 = 6$

و بالتالي : $p(X=16) = \dfrac{C_4^2\times C_1^1}{C_8^3} = \dfrac{6}{8\times 7} = \dfrac{3}{28}$.

خلاصة : $p(X=16) = \dfrac{3}{28}$

ب- نتمم ملء الجدول مع التعليل .

- نلاحظ أن : الحدث $(X=8)$ يمثل الحدث B و منه : $p(X=8) = p(B) = \dfrac{1}{7}$.
- الحدث $(X=4)$ يمثل الحدث " كرتين تحملان العدد ② و كرة تحمل العدد ① إذن $p(X=4) = \dfrac{C_4^2\times C_1^1}{C_8^3} = \dfrac{6\times 1}{8\times 7} = \dfrac{3}{28}$
- الحدث $(X=0)$ يمثل الحدث " على الأقل كرة تحمل العدد ⓪ "
إذن الحدث المضاد ل $(X=0)$ هو الحدث A ومنه $(X=0) = \overline{A}$
و منه : $p(X=0) = p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - \dfrac{5}{14} = \dfrac{9}{14}$ إذن $p(X=0) = \dfrac{9}{14}$

و منه سيتم ملء الجدول كالتالي :

x_i	0	4	8	16	المجموع
$p(X=x_i)$	$\dfrac{9}{14}$	$\dfrac{3}{28}$	$\dfrac{1}{7}$	$\dfrac{3}{28}$	1

.03

نعتبر العددين العقديين a و b حيث $a=\sqrt{3}+i$ و $b=\sqrt{3}-1+\left(\sqrt{3}+1\right)i$.

.01 ..

أ- نتحقق أن : $b=(1+i)a$.

لدينا :
$$\begin{aligned}(1+i)a &= (1+i)\left(\sqrt{3}+i\right)\\ &= \sqrt{3}+i+i\sqrt{3}-1\\ &= \sqrt{3}-1+\left(1+\sqrt{3}\right)i\\ &= b\end{aligned}$$

خلاصة : $b=(1+i)a$

ب- نستنتج أن : $|b|=2\sqrt{2}$ و أن $\arg b\equiv\frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$.

- نستنتج أن : $|b|=2\sqrt{2}$.

لدينا :
$$\begin{aligned}|b| &= |(1+i)a|\\ &= |1+i||a|\\ &= \sqrt{1^2+1^2}\times\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}\\ &= \sqrt{2}\times 2\\ &= 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

ومنه : $|b|=2\sqrt{2}$

- نستنتج أن : $\arg b\equiv\frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$.

لدينا :

- $1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]$
- $a=\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\left[2,\frac{\pi}{6}\right]$.
- و منه : $b=(1+i)a=\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]\times\left[2,\frac{\pi}{6}\right]=\left[2\sqrt{2},\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right]=\left[2\sqrt{2},\frac{5\pi}{12}\right]$

ملحوظة : وهذه الطريقة نحصل بها على كل من : معيار b أي $|b|$ و على عمدة b أي $\arg b$.

- و بالتالي : $\arg b\equiv\frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$

ج- نستنتج مما سبق أن : $\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

نعلم أن : $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}\times\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\text{Re}(b)}{|b|}=\cos\frac{5\pi}{12}$. ($\text{Re}(b)$ هو الجزء الحقيقي ل b)

و بالتالي : $\boxed{\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

02. نعتبر ، في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(0,\vec{u},\vec{v})$ النقطتين A و B اللتين لحقهما على التوالي هما a و b و النقطة C التي لحقها c حيث و $c=-1+i\sqrt{3}$.

أ- نتحقق أن : $c=ia$ و نستنتج أن $OA=OC$ و أن $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

- نتحقق أن : $c=ia$.

لدينا : $ia=i\left(\sqrt{3}+i\right)=i\sqrt{3}-1=-1+i\sqrt{3}=c$.

ومنه : $\boxed{c=ia}$

- نستنتج أن : $OA=OC$.

لدينا :

$$\begin{aligned} c=ia &\Rightarrow \frac{c}{a}=i \\ &\Rightarrow \left|\frac{c}{a}\right|=|i| \\ &\Rightarrow \frac{|c|}{|a|}=1 \\ &\Rightarrow \frac{|c-0|}{|a-0|}=\frac{OC}{OA}=1 \\ &\Rightarrow OC=OA \end{aligned}$$

و منه : $\boxed{OA=OC}$

- نستنتج أن : $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

لدينا :

$$\begin{aligned} c=ia &\Rightarrow \frac{c}{a}=i \\ &\Rightarrow \arg\left(\frac{c}{a}\right)\equiv\arg i\ [2\pi] \\ &\Rightarrow \arg\left(\frac{c-0}{a-0}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\ &\Rightarrow \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{aligned}$$

و منه : $\boxed{\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]}$

ب- نبين أن : النقطة B هي صورة النقطة A بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{OC}$.

❖ طريقة 1 :

لدينا الكتابة العقدي للإزاحة هي : $z' = z + c$

نعتبر أن النقطة A' حيث لحقها a' هي صورة النقطة A بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{OC}$.

و منه : $t_{\overrightarrow{OC}}(A) = A' \Leftrightarrow a' = a + c$

$\Leftrightarrow a' = a + ia$ (لأن $c = ia$)

$\Leftrightarrow a' = (1+i)a$

$\Leftrightarrow a' = b$ (لأن $b = (1+i)a$)

$\Leftrightarrow A' = t_{\overrightarrow{OC}}(A) = B$ (أي $a' = b$ $A' = B$)

خلاصة : النقطة B هي صورة النقطة A بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{OC}$.

❖ طريقة 2 :

نرمز للإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{OC}$ ب $t_{\overrightarrow{OC}}$.

و منه : B هي صورة النقطة A بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{OC}$ يعني أن : $t_{\overrightarrow{OC}}(A) = B$ و هذا يكافئ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$ أي نبين أن

$Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_{\overrightarrow{OC}}$ (لحق المتجهة $\overrightarrow{OC}$ هو $Z_{\overrightarrow{OC}} = c - 0 = c$ و $\overrightarrow{AB}$ هو $Z_{\overrightarrow{AB}} = b - a$ متساويين) أي $b - a = c - 0 = c$

من جهة أخرى : $b - a = (1+i)a - a$ (لأن $b = (1+i)a$)

$= a + ia - a$

$= ia$

$= c$ (حسب السؤال 2) أ -)

ومنه : $b - a = c$ و بالتالي $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_{\overrightarrow{OC}}$ أي $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$ و منه : $t_{\overrightarrow{OC}}(A) = B$.

خلاصة : B هي صورة النقطة A بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{OC}$.

ج- نستنتج أن الرباعي $OABC$ مربع .

لدينا :

- B هي صورة النقطة A بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{OC}$ إذن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$ و منه : الرباعي $OABC$ متوازي الأضلاع .
- $\left(\overline{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ إذن $OABC$ متوازي الأضلاع له زاوية قائمة .
- $OA = OC$ إذن $OABC$ متوازي الأضلاع له ضلعين متتابعين متقايسين .

ومنه : الرباعي $OABC$ متوازي الأضلاع له زاوية قائمة و له ضلعين متتابعين متقايسين إذن الرباعي $OABC$ مربع .

خلاصة : الرباعي $OABC$ مربع .

04.

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x) = x^2 + x - 2 + 2\ln x$.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

I.

01. نتحقق أن : $g(1) = 0$.

لدينا : $g(1) = 1^2 + 1 - 2 + 2\ln 1 = 2 - 2 + 2\times 0 = 0$.

خلاصة : $g(1) = 0$.

02. انطلاقا من الجدول تغيرات الدالة g جانبه :

✓ نبين أن : $g(x)\leq 0$ لكل x من $]0,1]$.

من خلال الجدول الدالة g هي تزايدية على $]0,+\infty[$ و منه : g تزايدية على $]0,1]$ و منه :لكل $x\in]0,1]$ لدينا :

$x\leq 1\Rightarrow g(x)\leq g(1)$ (لأن g تزايدية على $]0,1]$)

$\Rightarrow g(x)\leq 0$ (لأن $g(1)=0$)

و منه : $g(x)\leq 0$ لكل x من $]0,1]$.

✓ نبين أن : $g(x)\geq 0$ لكل x من $[1,+\infty[$.

من خلال الجدول الدالة g هي تزايدية على $]0,+\infty[$ و منه : g تزايدية على $[1,+\infty[$ و منه :لكل $x\in[1,+\infty[$ لدينا :

$x\geq 1\Rightarrow g(x)\geq g(1)$ (لأن g تزايدية على $[1,+\infty[$)

$\Rightarrow g(x)\geq 0$ (لأن $g(1)=0$)

و منه : $g(x)\leq 0$ لكل x من $]0,1]$.

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x+\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x$.

و ليكن (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ (الوحدة 1 cm) .

01. نبين أن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=+\infty$ و نؤول هندسيا النتيجة .

- نبين أن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=+\infty$.

لدينا :

✓ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(1-\frac{2}{x}\right)=-\infty$ (لأن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}-\frac{2}{x}=-\infty$) و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\ln x=-\infty$ (خاصية) و منه $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x=+\infty$

✓ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x=0$

✓ ومنه : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x+\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x=+\infty$

خلاصة : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=+\infty$

- نؤول هندسيا النتيجة .

بما أن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=+\infty$ فإن المنحنى (C) يقبل مقارب عمودي هو المستقيم الذي معادلته $x=0$.

خلاصة : المنحنى (C) يقبل مقارب عمودي هو المستقيم الذي معادلته $x=0$.

02...

أ- نبين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

لدينا :

✓ $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)=1$ (لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$) و $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ (خاصية) و منه $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x=+\infty$

✓ $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$

✓ ومنه : $\lim_{x\to+\infty}x+\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x=+\infty$

خلاصة : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

ب- نبين أن : المنحنى (C) يقبل بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$.

لدينا :

- $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ومنه نحدد قيمة a (أي $a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$)
- نحدد قيمة a :

لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}1+\left(1-\frac{2}{x}\right)\times\frac{\ln x}{x}=1$

(لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ (خاصية) و $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)=1$ و منه $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)\times\frac{\ln x}{x}=0$)

و منه : $a=1$

- نحدد قيمة b (أي $b=\lim_{x\to+\infty}f(x)-ax=\lim_{x\to+\infty}f(x)-x$)

لدينا : $\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\cancel{x}+\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x-\cancel{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x=+\infty$.

(لأن $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ (خاصية) و $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)=1$ و منه $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)\times\frac{\ln x}{x}=+\infty$)

و منه : $b=+\infty$.

خلاصة : المنحنى (C) يقبل بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$.

.03

أ- نبين أن : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ لكل x من $]0,+\infty[$.

لدينا : الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ لأنها مجموع و جداء عدة دوال قابلة الاشتقاق على $]0,+\infty[$.

لدينا : $f'(x)=\left(x+\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x\right)'$.

$$=1+\left(1-\frac{2}{x}\right)'\ln x+\left(1-\frac{2}{x}\right)\times\frac{1}{x}$$ (لأن $(\ln x)'=\frac{1}{x}$)

$$=1+\frac{2}{x^2}\ln x+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2\ln x + x - 2}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 + x - 2 + 2\ln x}{x^2}$$

$$= \frac{g(x)}{x^2}$$

خلاصة : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ لكل x من $]0,+\infty[$.

ب- نبين أن : الدالة f تناقصية على المجال $]0,1]$ و تزايدية على المجال $[1,+\infty[$.

لهذا ندرس إشارة $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ أي ندرس إشارة $g(x)$ فقط .

حسب ما سبق :

- $g(x) \leq 0$ لكل x من $]0,1]$ إذن $f'(x) \leq 0$ على المجال $]0,1]$. و منه f تناقصية على المجال $]0,1]$.
- $g(x) \geq 0$ لكل x من $[1,+\infty[$ إذن $f'(x) \geq 0$ على المجال $[1,+\infty[$. و منه f تزايدية على المجال $[1,+\infty[$.

خلاصة : الدالة f تناقصية على المجال $]0,1]$ و تزايدية على المجال $[1,+\infty[$.

ج- نضع جدول لتغيرات f على المجال $]0,+\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(1)=1$	↗ $+\infty$

.04 ..

أ- نحل على المجال $]0,+\infty[$ المعادلة $\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x = 0$

لدينا :

$$\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x = 0 \Leftrightarrow \left(1-\frac{2}{x}=0 \text{ أو } \ln x = 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{x}=1 \text{ أو } \ln x = \ln 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x = 2 \in]0,+\infty[\text{ أو } x = 1 \in]0,+\infty[\right)$$

خلاصة : المعادلة $\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x = 0$ لها حلين على $]0,+\infty[$ هما $x=1$ أو $x=2$.

ب- نستنتج أن : المنحنى (C) يقطع المستقيم (D) في نقطتين يتم تحديد زوج إحداثيتي كل منهما .

ليكن x من $]0,+\infty[$.

$$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (C)\cap(D) \Leftrightarrow \begin{cases} M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (C) \\ M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (D) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = y \\ y = x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = y = x$$

لهذا نحل المعادلة : $f(x) = y$

لدينا : $f(x) = y \Leftrightarrow \cancel{x} + \left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln x = \cancel{x}$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln x = 0$$

$\Leftrightarrow x = 1$ أو $x = 2$ (حسب السؤال السابق)

إذن : بالنسبة ل $x = 1$ فإن $y = x = 1$ (لأن $f(x) = y = x$)

بالنسبة ل $x = 2$ فإن $y = x = 2$ (لأن $f(x) = y = x$)

خلاصة : المنحنى (C) يقطع المستقيم (D) في نقطتين حيث زوج إحداثيتي كل منهما كالتالي $(1;1)$ و $(2;2)$.

ج- بين أن : $f(x) \leq x$ لكل x من المجال $[1;2]$ و استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (D) على $[1;2]$.

لدينا : $f(x) \leq x \Leftrightarrow \cancel{x} + \left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln x \leq \cancel{x}$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-2}{x}\right)\ln x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\ln x \leq 0 \quad ; \quad (x \in [1;2])$$

نعلم أن $\ln x \geq 0$ على المجال $[1,+\infty[$ إذن إشارة $(x-2)\ln x$ هي إشارة $x-2$ على المجال $[1;2]$

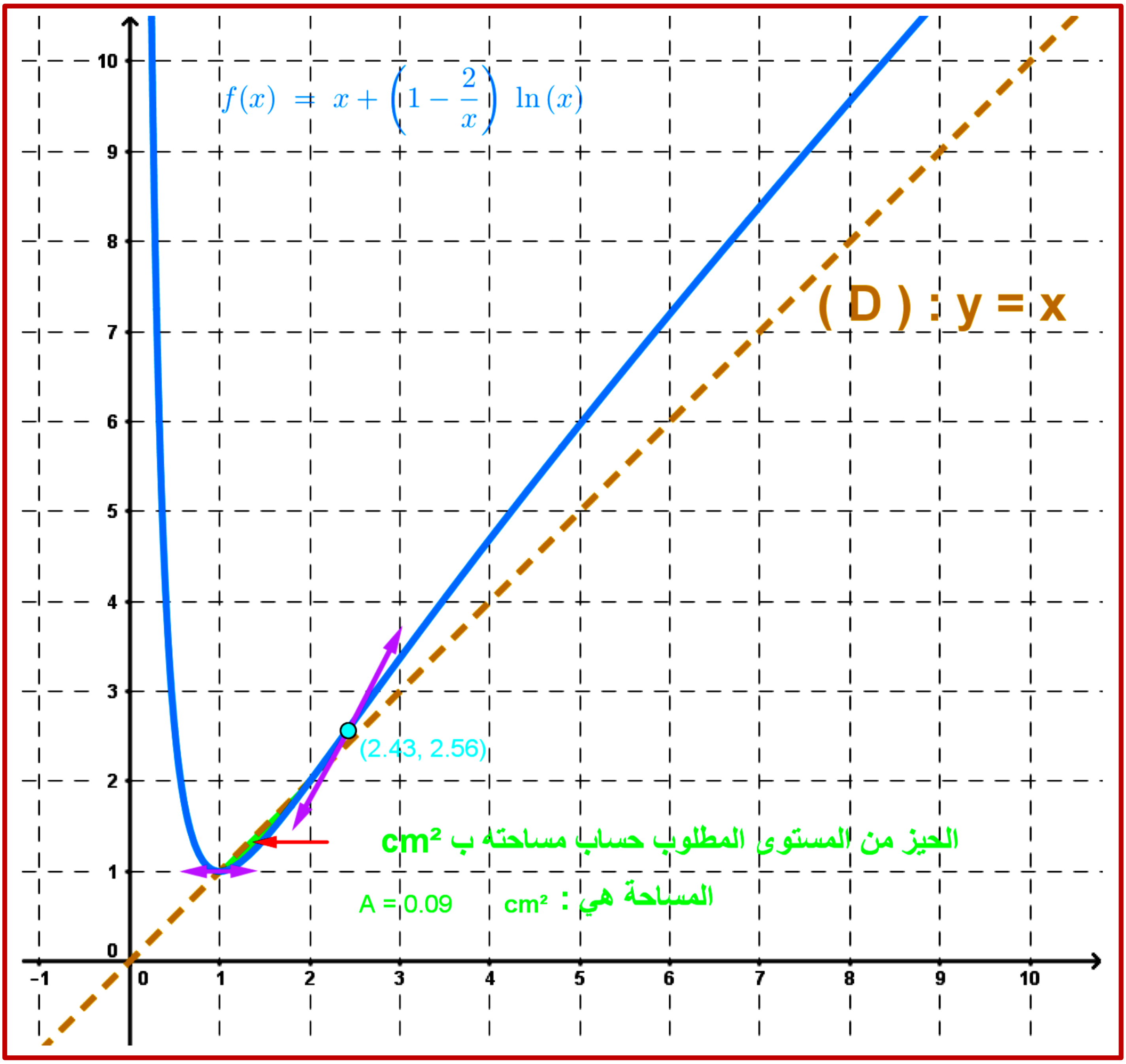
و منه الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (D) على $[1;2]$ هو كالتالي :

- المنحنى (C) و المستقيم (D) يتقاطعان في نقطتين حيث زوج إحداثيتي كالتالي $(1;1)$ و $(2;2)$.
- المنحنى (C) يوجد قطعا تحت المستقيم (D) على المجال $]1;2[$.

خلاصة : الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (D) على $[1;2]$ بواسط الجدول التالي :

x	1		2
$f(x)-x$	0	$-$	0
	‖	(C) تحت (D)	‖
الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (D)	(C) و (D) يتقاطعان		(C) و (D) يتقاطعان

.05 ننشئ المستقيم (D) و المنحنى (C) في نفس المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ (نقبل أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف وحيدة أفصولها محصور بين $2,4$ و $2,5$).



..06

أ- نبين أن : $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$

لدينا : $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx = \int_1^2 (\ln x)' \times \ln x dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left((\ln 2)^2 - (\ln 1)^2\right) = \frac{1}{2}\left((\ln 2)^2 - 0\right) = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$.

خلاصة : $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$

ب- نبين أن الدالة $H : x \mapsto 2\ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto \frac{2}{x} - 1$ على المجال $]0,+\infty[$.

لهذا نبين أن : $H'(x) = h(x)$.

لدينا : $H'(x) = (2\ln x - x)' = 2\times\frac{1}{x} - 1 = \frac{2}{x} - 1 = h(x)$

و منه : $H'(x) = h(x)$

خلاصة : الدالة $H : x \mapsto 2\ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto \frac{2}{x} - 1$ على المجال $]0,+\infty[$.

ج- باستعمال المكاملة بالأجزاء ، نبين أن : $\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1\right)\ln x dx = (1 - \ln 2)^2$.

نضع :

$$\begin{array}{lll} u(x) = \ln x & & u'(x) = \frac{1}{x} \\ (1)\downarrow & (2)\searrow \quad - & \downarrow(3) \\ v'(x) = \frac{2}{x} - 1 & & v(x) = 2\ln x - x \end{array}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1\right)\ln x dx &= \left[\ln x(2\ln x - x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x}\times(2\ln x - x)dx \\
&= \ln 2(2\ln 2 - 2) - \ln 1(2\ln 1 - 1) - \int_1^2 \left(2\frac{\ln x}{x} - 1\right)dx \\
&= 2(\ln 2)^2 - 2\ln 2 - \left(2\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx - \int_1^2 1dx\right) \\
&= 2(\ln 2)^2 - 2\ln 2 - \left(2\times\frac{1}{2}(\ln 2)^2 - [x]_1^2\right) \\
&= 2(\ln 2)^2 - 2\ln 2 - \left((\ln 2)^2 - (2-1)\right) \\
&= 2(\ln 2)^2 - 2\ln 2 - (\ln 2)^2 + 1 \\
&= (\ln 2)^2 - 2\ln 2 + 1 \\
&= (1 - \ln x)^2
\end{aligned}$$

خلاصة : $\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1\right)\ln x dx = (1 - \ln 2)^2$

د- نحسب ب cm^2 مساحة حيز من المستوى المحصور بين المنحنى (C) و المستقيم (D) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = 2$.

المساحة المطلوبة هي :

$\left(\int_1^2 |f(x) - x|dx\right)\times\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\| = \left(\int_1^2 (x - f(x))dx\right)\times\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|\ cm^2$. (لأن $f(x) \le x$ على $[1;2]$)

$$= \left(\int_1^2 \left(x - \left(x + \left(1 - \frac{2}{x} \right) \ln x \right) \right) dx \right) \times 1 \times 1 \text{ cm}^2$$

$$= \int_1^2 - \left(1 - \frac{2}{x} \right) \ln x dx \text{ cm}^2$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1 \right) \ln x dx \text{ cm}^2$$

$= (1 - \ln 2)^2 \text{ cm}^2$ (حسب السؤال السابق)

خلاصة : مساحة حيز من المستوى المحصور بين المنحنى (C) و المستقيم (D) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = 2$ هي $(1 - \ln 2)^2 \text{ cm}^2$.

III. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = \sqrt{3}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$.

01. نبين بالترجع أن : $1 \le u_n \le 2$ لكل n من $\mathbb{N}$.

- نتحقق أن العلاقة صحيحة ل $n = 0$

لدينا : $1 \le u_0 = \sqrt{3} \le 2$ و منه العلاقة صحيحة من أجل $n = 0$.

- نفترض أن العلاقة صحيحة للرتبة n : أي $1 \le u_n \le 2$ (معطيات الترجع) .
- نبين أن العلاقة صحيحة ل $n+1$: أي نبين أن : $1 \le u_{n+1} \le 2$

حسب معطيات الترجع لدينا : $1 \le u_n \le 2$

و منه : $1 \le u_n \le 2 \Rightarrow f(1) \le f(u_n) \le f(2)$ (لأن f تزايدية على $[1;2]$ و $1 \le u_n \le 2$)

$\Rightarrow 1 \le u_{n+1} \le 2$ (لأن $f(2) \le 2$ و $f(1) \le 1$ و ذلك $(f(x) \le x \; ; \; x \in [1;2])$

أو أيضا $f(2) = 2$ و $f(1) = 1$ لأن (C) و (D) يتقطعان في نقطتين

حيث : زوج إحداثيتي كالتالي $(1;1)$ و $(2;2)$.

و منه : العلاقة صحيحة ل $n+1$.

خلاصة : $1 \le u_n \le 2$ لكل n من $\mathbb{N}$.

02. نبين أن المتتالية (u_n) تناقصية (يمكن استعمال نتيجة السؤال II (4) ج -)

لهذا نبين أن : $u_{n+1} - u_n \le 0$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ليكن n من $\mathbb{N}$ نضع $u_n = x$.

- و نعلم أن $1 \le u_n \le 2$ لكل n من $\mathbb{N}$ إذن $x = u_n \in [1;2]$ (لكل n من $\mathbb{N}$)
- و لدينا : $f(x) \le x$ لكل x من $[1;2]$ حسب II (4) ج -) و منه : $f(u_n) \le u_n$ (لكل n من $\mathbb{N}$)

إذن : $u_{n+1} \le u_n$ (لأن $u_{n+1} = f(u_n)$) و ذلك لكل n من $\mathbb{N}$.

و بالتالي : لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا $u_{n+1} \le u_n$ (أو أيضا $u_{n+1} - u_n \le 0$)

خلاصة : المتتالية (u_n) تناقصية .

03. استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و حدد نهايتها .

❖ نستنتج أن : المتتالية (u_n) متقاربة

- لدينا المتتالية (u_n) تناقصية و مصغورة (لأن $1 \leq u_n \leq 2$) و منه : المتتالية (u_n) متقاربة مع نهايتها ℓ مع $\ell \in \mathbb{R}$

خلاصة : (u_n) متقاربة

❖ نحدد نهاية المتتالية (u_n)

- المتتالية تكتب على شكل $u_{n+1} = f(u_n)$
- الدالة f متصلة على $I = [1;2]$
- $f(I) \subset I = [1;2]$ لأن :

$$1 \leq x \leq 2 \Rightarrow f(1) \leq f(x) \leq f(2)$$

$$\Rightarrow 1 \leq f(x) \leq 2 \qquad \left(f(x) \leq x \ ; \ x \in [1;2]\right)$$

- بما أن (u_n) متقاربة إذن نهايتها ℓ هي حل للمعادلة $f(x) = x \ ; \ x \in [1;2]$ (حسب خاصية) .

أي $f(x) - x = 0 \ ; \ x \in [1;2]$ و هذه المعادلة لها حلين هما 1 و 2 و بما أن المتتالية (u_n) تناقصية إذن $u_0 \geq u_1 \geq u_2 .... \geq u_n$ و منه $u_0 = \sqrt{3} \geq u_n$ أي $u_n \leq \sqrt{3} < 2$ و منه $u_n < 2$ ومنه الحل المقبول هو $\ell = 1$.

خلاصة : $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$

التصحيح من انجاز الأستاذ مبارك هندا

التمرين الأول :

1ـ أـ لتكن : $ax+by+cz+d=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (P) و بما ان : $\vec{u}(1,0-1)$ متجهة منظمية على المستوى (P) فان : $a=1$ و $b=0$ و $c=-1$ و منه معادلة المستوى (P) تصبح : $x-z+d=0$ وبما ان : المستوى (P) يمر من النقطة $A(0,1,1)$ فان : $0-1+d=0$ أي ان : $d=1$ و منه فان : $x-z+1=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (P).
1ـ بـ + لنحسب مسافة النقطة $\Omega(0,1,-1)$ عن المستوى $(P):\ x-z+1=0$ لدينا : $d(\Omega,(P))=\dfrac{\lvert x_\Omega-z_\Omega+1\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ يعني : $d(\Omega,(P))=\dfrac{\lvert 0-(-1)+1\rvert}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}$ أي : $d(\Omega,(P))=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ و بما ان شعاع الفلكة (S) هو : $R=\sqrt{2}$ و ان : $d(\Omega,(P))=\sqrt{2}$ أي : $d(\Omega,(P))=R=\sqrt{2}$ فان : المستوى (P) مماس للفلكة (S). + لنتحقق من ان النقطة $B(-1,1,0)$ هي نقطة تماس (P) و (S) ▪ لنتحقق من كون $B\in(P)$: $-1-0+1=0$ أي ان : $0=0$ اذن : $B\in(P)$ ▪ لنتحقق من كون $B\in(S)$: لدينا مركز الفلكة (S) هو $\Omega(0,1,-1)$ و شعاعها $R=\sqrt{2}$ أي ان : $(S):\ (x-0)^2+(y-1)^2+(z-(1))^2=\sqrt{2}^2$ أي ان : $(S):\ x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=2$ و لدينا : $(-1)^2+(1-1)^2+(0+1)^2=2$ أي أن : $2=2$ اذن : $B\in(S)$ ومنه فان : النقطة $B(-1,1,0)$ هي نقطة تماس (P) و (S).
2ـ أ – لدينا : المستقيم (Δ) يمر من النقطة $A(0,1,1)$ و بما ان : $(\Delta)\perp(P)$ فان : $\vec{u}(1,0,-1)$ متجهة موجهة للمستقيم (P) فان : $\begin{cases} x=0+1t \\ y=1+0t \\ z=1-1t \end{cases}\ ;\ (t=IR)$ تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ).
2ـبـ ولدينا : $R=\dfrac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{2}=\dfrac{\lVert\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{n}\rVert}{\lVert\vec{n}\rVert}=d(\Omega,(\Delta))$ و منه (Δ) مماس للفلكة (S) لدينا : $(S):\ x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=2$ و $C(1,1,0)$ و بما أن : $1^2+(1-1)^2+(0+1)^2=2$ أي $2=2$ فان : $C\in(S)$ و لدينا من جهة أخرى : $(\Delta):\begin{cases} x=0+1t \\ y=1+0t \\ z=1-1t \end{cases}$ و $\begin{cases} 1=0+1t \\ 1=1+0t \\ 0=1-1t \end{cases}$ أي $\begin{cases} t=1 \\ 1=1 \\ t=1 \end{cases}$ و منه : $C\in(\Delta)$ و بالتالي (Δ) مماس للفلكة (S) في النقطة $C(1,1,0)$
3ـ + حساب $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC}$

لدينا : $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$ اذن : $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}=2\vec{k}$

+ حساب مساحة المثلث OCB

لدينا : $S_{OCB}=\frac{\left\|\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}\right\|}{2}=\frac{2}{2}$ اذن : $S_{OCB}=1$

التمرين الثاني :

1ـ لدينا : $p(A)=\frac{cardA}{card\Omega}=\frac{C_6^3}{C_8^3}=\frac{20}{56}=\frac{5}{14}$ و : $p(B)=\frac{cardB}{card\Omega}=\frac{C_4^3+C_1^1\times C_4^1\times C_1^1}{C_8^3}=\frac{4}{56}=\frac{1}{7}$	
2ـ أ ـ لدينا : $p(X=16)=\frac{C_4^2\times C_1^1}{C_8^3}=\frac{6}{56}=\frac{3}{28}$	

2ـ ب ـ

القيم التي يأخذها X : $X(\Omega)=\{0,4,8,16\}$

لدينا : $p(X=0)=1-p(\overline{X=0})=1-\frac{C_6^3}{C_8^3}=1-\frac{20}{56}=\frac{36}{56}=\frac{9}{14}$

و : $p(X=4)=\frac{C_4^2\times C_1^1}{C_8^3}=\frac{6}{56}=\frac{3}{28}$

و : $p(X=8)=\frac{C_4^3+C_1^1\times C_4^1\times C_1^1}{C_8^3}=\frac{8}{56}=\frac{1}{7}$

و : $p(X=16)=\frac{6}{56}=\frac{3}{28}$ (حسب نتيجة السؤال السابق)

وبالتالي :

$X=x_i$	0	4	8	16
$p(X=x_i)$	$\frac{9}{14}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{28}$

التمرين الثالث :

1ـأـ لدينا : $(1+i)a=(1+i).(\sqrt{3}+i)=\sqrt{3}+i+\sqrt{3}i-1=\sqrt{3}-1+i(\sqrt{3}+1)=b$

اذن : $b=(1+i)a$

1ـبـ لدينا : $b=(1+i)a$ يعني : $|b|=|(1+i).a|=|1+i|\times|a|=\sqrt{1^2+1^2}\times\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=2\sqrt{2}$

لدينا : $\arg b\equiv\arg[(1+i).a]\equiv\arg(1+i)+\arg(a)$

- ولدينا : $1+i=\sqrt{2}.(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}.(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$ أي أن : $\arg(1+i)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$
- و : $a=2(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2})=2.(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$ أي أن : $\arg(a)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$

وبالتالي : $\arg b\equiv(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})[2\pi]\equiv\frac{5\pi}{12}[2\pi]$

1ـجـ لدينا : $b=\sqrt{3}-1+(\sqrt{3}+1)i$ و : $|b|==2\sqrt{2}$ يعني : $b=2\sqrt{2}.(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}+i\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}})$

يعني : $b=2\sqrt{2}.(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4})$ وبماأن : $\arg b\equiv\frac{5\pi}{12}[2\pi]$ فان : $\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2ـ أـ لدينا : $ia=i.(\sqrt{3}+i)=\sqrt{3}i+i^2=-1+\sqrt{3}i$ اذن : $c=ia$

لدينا : $c=ia$ يعني أن : $\frac{c}{a}=i$ يعني أن : $\begin{cases} \left\lvert\frac{c}{a}\right\rvert=1 \\ \frac{c}{a}=1.(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}) \end{cases}$ يعني : $\begin{cases} \lvert c\rvert=\lvert a\rvert \\ \arg\frac{c}{a}\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ يعني : $\begin{cases} \lvert c-o\rvert=\lvert a-o\rvert \\ \arg\frac{c-o}{a-o}\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ اذن : $\begin{cases} OA=OC \\ (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$
2ـب تذكران : ليكن z لحق نقطة M من المستوى العقدي و z' لحق النقطة M' صورة M بالازاحة T التي متجهتها $\overrightarrow{OC}$. يعني : $T(M)=M'\Leftrightarrow\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{OC}\Leftrightarrow z'-z=c$ لدينا : + لحق المتجهة $\overrightarrow{OC}$ هو : $Aff(\overrightarrow{OC})=c=ia$ + لحق المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هو : $Aff(\overrightarrow{AB})=b-a=(1+i).a-a=ia$ اذن : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}$ أي : $b-a=c$ و منه فان : النقطة B هي صورة النقطة A الازاحة التي متجهتها $\overrightarrow{OC}$.
2ـج لدينا : B هي صورة النقطة A الازاحة التي متجهتها $\overrightarrow{OC}$ يعني : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}$ أي ان : $OABC$ متوازي أضلاع و بما أن : $OA=OC$ و ان : $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ (حسب نتيجة السؤال 2ـأ) فان : $OABC$ مربع.

المسألة :

Iـ 1ـ لدينا : $g(x)=x^2+x-2+2\ln x$ و : $D_g=]0,+\infty[$ و : $1\in]0,+\infty[$ يعني : $g(1)=1^2+1-2+2\ln 1$ اذن : $g(1)=0$
2ـ ليكن x عنصرا من المجال $]0,+\infty[$ ، يعني : $x\in]0,1]$ أو $x\in[1,+\infty[$ ▪ اذا كان : $x\in]0,1]$: لدينا $x\leq1$ و بما أن g تزايدية حسب جدول التغيرات فان : $g(x)\leq g(1)$ و منه فان : $g(x)\leq0$ $\forall x\in]0,1]$ ▪ اذا كان : $x\in[1,+\infty[$: لدينا $x\geq1$ و بما أن g تزايدية حسب جدول التغيرات فان : $g(x)\geq g(1)$ و منه فان : $g(x)\geq0$ $\forall x\in[1,+\infty[$
IIـ 1ـ لدينا : $\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}x+(1-\frac{2}{x})\ln x$ و بما أن : $\lim_{x\to0^+}x=0$ و $\lim_{x\to0^+}1-\frac{2}{x}=-\infty$ و $\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ فان : $\lim_{x\to0^+}f(x)=+\infty$ بما ان $\lim_{x\to0^+}f(x)=+\infty$ فان : المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مقارب عمودي للمنحنى (C) على يمين 0.
2ـ أـ لدينا : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x+(1-\frac{2}{x})\ln x$ $=\lim_{x\to+\infty}x+\ln x-2\frac{\ln x}{x}$ و بما أن : $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ فان : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$
2ـب لدينا : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

ولدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}1+\frac{\ln x}{x}-2\frac{\ln x}{x^2}$ وبما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$

فان : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$

ولدينا من جهة اخرى : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\frac{2}{x})\ln x=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x-2\frac{\ln x}{x}$

وبما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

فان : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-x=+\infty$

ومنه فان : المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x$ بجوار $+\infty$

3.أ- ليكن x عنصرا من المجال $]0,+\infty[$ ، ولدينا : $f(x)=x+(1-\frac{2}{x})\ln x$

اذن : $f'(x)=1+\frac{2}{x^2}\ln x+(1-\frac{2}{x}).\frac{1}{x}$ يعني : $f'(x)=1+\frac{2}{x^2}\ln x+\frac{x-2}{x^2}$

يعني : $f'(x)=\frac{x^2++x-2+2\ln x}{x^2}$ اذن : $\forall x\in]0,+\infty[;\quad f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

3.ب- لدينا : $\forall x\in]0,+\infty[;\ f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ و : $\forall x\in]0,+\infty[;\ x^2\succ 0$

اذن اشارة f' هي نفسها اشارة $g(x)$ لكل $x\in]0,+\infty[$

و حسب نتيجة السؤال (I-2) :

لدينا : $\forall x\in]0,1]\quad g(x)\le 0$ ومنه : $\forall x\in]0,1];\ f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}\le 0$ اذن : f تناقصية على $]0,1]$

ولدينا : $\forall x\in[1,+\infty[\quad g(x)\ge 0$ ومنه : $\forall x\in[1,+\infty[\ f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}\ge 0$ اذن : f تزايدية على $[1,+\infty[$

3.ج-

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	-	0	+	
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

4.أ- لدينا : $(1-\frac{2}{x})\ln x=0$ يعني : $\ln x=0$ أو $1-\frac{2}{x}=0$ يعني : $x=1$ أو $x=2$

اذن مجموعة حلول المعادلة $(1-\frac{2}{x})\ln x=0$ على المجال $]0,+\infty[$ هي : $S=\{1,2\}$

لاحظ ان : $1\in]0,+\infty[$ و ان : $2\in]0,+\infty[$

4.ب - لدينا : $f(x)=x$ يعني : $(1-\frac{2}{x})\ln x=0$ يعني : $x=1$ أو $x=2$

ومنه المنحنى (C) يقطع المستقيم (D) في نقطتين هما : $M(1,1)$ و $N(2,2)$

4.ج- لدينا : $\forall x\in]0,+\infty[\ ;\ f(x)-x=(1-\frac{2}{x})\ln x=\frac{x-2}{x}.\ln x$

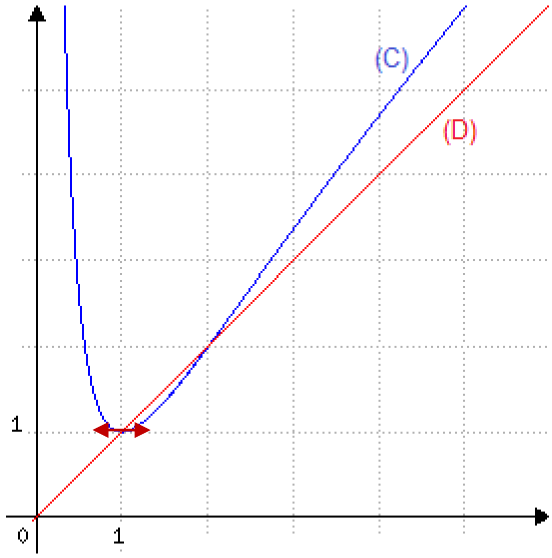
وبما أن : $\forall x\in[1,2]\ \ln x\ge 0$ و $\forall x\in[1,2]\ x-2\le 0$ و $\forall x\in[1,2]\ x\ge 0$

فان : $\forall x\in[1,2]\ \frac{x-2}{x}.\ln x\le 0$ أي ان : $\forall x\in[1,2]\quad f(x)-x\le 0$

وبالتالي فان : $\forall x\in[1,2]\quad f(x)\le x$

بما أن : $f(x) \le x \quad \forall x \in [1,2]$ فان المنحنى (C) يوجد تحت المستقيم (D) على المجال $[1,2]$

5ـ تمثيل المنحنى (C) و المستقيم (D) في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$



6ـأ $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx = \int_1^2 \frac{1}{x}.\ln x.dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^2 = \frac{(\ln 2)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{1}{2}.(\ln 2)^2$

6ـب لدينا : $H(x) = 2\ln x - x$ و $h(x) = \dfrac{2}{x} - 1$

لدينا : H دالة متصلة على المجال $]0,+\infty[$ (لأنها مجموع دوال متصلة على $]0,+\infty[$)

و لدينا : $H'(x) = (2\ln x - x)' = \dfrac{2}{x} - 1$ يعني : $H'(x) = h(x)$

اذن : H دالة أصلية للدالة h على المجال $]0,+\infty[$.

6ـج لدينا : $\displaystyle\int_1^2 (\frac{2}{x}-1)\ln xdx = [(2\ln x - x).\ln x]_1^2 - \int_1^2 \frac{2\ln x - x}{x}dx = (2\ln 2 - 2).\ln 2 - 2\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx + [x]_1^2$

يعني : $\displaystyle\int_1^2 (\frac{2}{x}-1)\ln xdx = 2(\ln 2)^2 - 2\ln 2 - (\ln 2)^2 + 1 = (\ln 2)^2 - 2\ln 2 + 1$

اذن : $\displaystyle\int_1^2 (\frac{2}{x}-1)\ln xdx = (\ln 2 - 1)^2 = (1 - \ln 2)^2$

6ـد لتكن $\mathcal{A}$ مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C) و المستقيم (D) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=2$.

لدينا : $\mathcal{A} = \displaystyle\int_1^2 |f(x) - x|dx$

و حسب نتيجة السؤال (II – 4ـج) : $f(x) \le x \quad \forall x \in [1,2]$ أي أن : $f(x) - x \le 0 \quad \forall x \in [1,2]$

أي ان : $|f(x) - x| = -(f(x) - x) = (\dfrac{2}{x} - 1).\ln x \quad \forall x \in [1,2]$

و منه : $\mathcal{A} = \displaystyle\int_1^2 (\frac{2}{x}-1)\ln xdx = (1-\ln 2)^2 cm^2$

III ـ1 ـ بالنسبة ل $n=0$: لدينا $u_0 = \sqrt{3}$ و منه $1 \le u_0 \le 2$ (العبارة صحيحة لأجل $n=0$)

نفترض أن : $1 \le u_n \le 2$ و نبين ان $1 \le u_{n+1} \le 2$

لدينا : $1 \le u_n \le 2$ أي أن : $u_n \in [1,2] \subset]1,+\infty[$ و بما أن : f تزايدية على $]1,+\infty[$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

فان : $f(1) \le f(u_n) \le f(2)$ اي أن : $1 \le u_{n+1} \le 2$ (العبارة صحيحة لأجل $n+1$)

	و بالتالي : $\forall n \in IN \; ; \; 1 \leq u_n \leq 2$
2ـ	لدينا حسب نتيجة السؤال (II.4ـج) : $\forall x \in [1,2] \; ; \; f(x) \leq x$ و لدينا من جهة أخرى : $\forall n \in IN \; ; \; 1 \leq u_n \leq 2$ أي أن : $\forall n \in IN \; ; u_n \in [1,2]$ اذن : $\forall n \in IN \; ; \; f(u_n) \leq u_n$ يعني : $\forall n \in IN \; ; \; u_{n+1} \leq u_n$ و بالتالي فان المتتالية (u_n) تناقصية
3ـ	+ لدينا : $\forall n \in IN \; ; \; 1 \leq u_n \leq 2$ يعني ان المتتالية (u_n) مصغورة بالعدد 1 و بما أن المتتالية (u_n) تناقصية فانها متقاربة. + لدينا f متصلة على المجال $]0,+\infty[$ و بالخصوص على المجال $[1,2]$ و : $f([1,2]) = [1,2]$ أي ان : $f([1,2]) \subset [1,2]$ و بما أن (u_n) متقاربة و $u_0 \in [1,2]$ فان النهاية l للمتتالية (u_n) تحقق : $f(l) = l$ و حسب نتيجة السؤال (II.4ـب) : $l = 1$ أو $l = 2$ و بما أن (u_n) تناقصية فان : $\forall n \in IN \; ; \; u_n \leq u_0$ أي : $\forall n \in IN \; ; \; u_n \leq \sqrt{3}$ أي $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leq \sqrt{3}$ و بالتالي فان : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

التصحيح من انجاز الأستاذ مبارك هندا

Phy.handa@gmail.com

GSM : 0661931283