Prof : Sabbar Amine

Exercice n°1:(4.5pts)

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$ définie par: $u_0=6$ et $u_{n+1}=\frac{1}{5}u_n+\frac{2}{5}$ pour tout n de IN

1.a. Calculer u_1 et u_2

1.b. Montrer par récurrence que pour tout n de IN : $u_n>\frac{1}{2}$

1.c. Vérifier que pour tout n de IN : $u_{n+1}-u_n=\frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}-u_n\right)$

1.d. En déduire que $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$ est décroissante et qu'elle est convergente.

2.On pose pour tout n de IN : $v_n=u_n-\frac{1}{2}$

2.a. Montrer que $(v_n)_{n\in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique en précisant sa raison.

2.b. Calculer son premier terme v_0

2.c. Calculer v_n en fonction de n et en déduire que pour tout n de IN : $u_n=\frac{1}{2}\left(11\left(\frac{1}{5}\right)^n+1\right)$

2.d. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3. On pose $S_n=u_0+u_1+u_2+\dots\dots\dots+u_{n-1}$

Montrer que $S_n=\frac{55}{8}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)+\frac{n}{2}$

Exercice n°2 :(4pts)

Un sac contient neuf boules indiscernables au toucher portant respectivement les nombres : 0 ;0 ;1 ;1 ;1 ;1 ;2 ;2;2

On tire simultanément au hasard deux boules du sac.

1. Montrer que le nombre de cas possibles est 36

2. Soit X la variable aléatoire qui correspond à la somme des deux nombres portés par les deux boules tirées.

2.a. Montrer que $p(X=2)=\frac{12}{36}$

2.b. Copier le tableau ci – contre et le compléter en justifiant la réponse.

x_i	0	1	2	3	4
$p(X=x_i)$			$\frac{12}{36}$		

2.c. Calculer $E(X)$l'espérance mathématique de la variable aléatoire X

Exercice n°3 :(8.5pts)

Partie I

On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie sur $]0;+\infty[$ par

$g(x)=2-\dfrac{2}{x}+\ln x$

1. Calculer $g'(x)$ et en déduire que g est croissante sur $]0;+\infty[$

2.a. Calculer $g(1)$ et dresser le tableau de variations de la fonction g (Le calcul des limites en 0 et en $+\infty$ n'est pas demandé)

2.b. En déduire le signe de g sur chacun des intervalles $]0;1]$ et $[1;+\infty[$

Partie II

Prof: Sabbar Amine

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $]0;+\infty[$ par :

$f(x)=x-1+(x-2)\ln x$

1. Montrer que : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$

2. Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

3.a. Montrer que $f'(x)=g(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$

3.b. Calculer $f(1)$, $f(2)$ et $f(\frac{1}{e})$ puis dresser le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$

3.c. En utilisant le tableau de variations déterminer l'image par f de l'intervalle $\left[\dfrac{1}{e};2\right]$

Exercice n°4 :(3pts)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

On considère la fonction numérique h de la variable réelle x définie sur IR par :

$h(x)=xe^x-2x+1$

1. En utilisant une intégration par parties montrer que : $\int_0^1 xe^x dx=1$

2. Dans la figure ci-dessous (C_h) est la courbe représentative de h dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Calculer l'aire de la partie hachurée