

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2019
- الموضوع -



المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

RS24

4	مدة الانجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية : (أ) و (ب)	الشعبة أو المسلك

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من أربعة تمارين مستقلة فيما بينها.
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين 1 يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5 ن)
- التمرين 2 يتعلق بالاحتمالات.....(3 ن)
- التمرين 3 يتعلق بالبنىات الجبرية.....(3.5 ن)
- التمرين 4 يتعلق بالتحليل.....(10 ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها
لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين 1: (3.5 نقطة)

ليكن α عددا عقديا غير منعدم.

I- نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - i\alpha\sqrt{3}z - \alpha^2 = 0$: (E_α)

1- أ) تحقق أن مميز المعادلة (E_α) هو: $\Delta = \alpha^2$ 0.25

ب) حل في \mathbb{C} المعادلة (E_α) 0.5

2- علما أن $\alpha = |\alpha|e^{i\lambda}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)، اكتب حل المعادلة (E_α) على الشكل الأسّي. 0.5

II- نفترض أن المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O; \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر النقط Ω و M_1

و M_2 ذات الألفاق على التوالي α و $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$ و $z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$ و ليكن R الدوران الذي مركزه O

و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

1- أ) بين أن $R(\Omega) = M_1$ و أن $R(M_1) = M_2$ 0.5

ب) استنتج أن المثلثين OM_1M_2 و $O\Omega M_1$ متساويا الأضلاع. 0.25

2- أ) تحقق أن: $z_1 - z_2 = \alpha$ 0.25

ب) بين أن المستقيمين (ΩM_2) و (OM_1) متعامدان. 0.5

ج) استنتج أن $O\Omega M_1 M_2$ معين. 0.25

3- بين أن لكل عدد حقيقي θ ، العدد $Z = \frac{z_2 - \alpha}{z_1 - \alpha} \div \frac{z_2 - |\alpha|e^{i\theta}}{z_1 - |\alpha|e^{i\theta}}$ حقيقي. 0.5

التمرين 2: (3 نقط)

يحتوي كيس على n كرة مرقمة من 1 إلى n ($n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3$). نسحب، الواحدة تلو الأخرى و بدون إحلال، جميع الكرات من هذا الكيس. لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس.

1- ما هو احتمال الحصول على الكرات 1 و 2 و 3 بالتتابع و في هذا الترتيب؟ 1

2- ما هو احتمال الحصول على الكرات 1 و 2 و 3 في هذا الترتيب (سواء كانت متتابعة أم غير متتابعة)؟ 1

3- نعتبر المتغير العشوائي X_n الذي يساوي العدد الضروري من السحبات للحصول على الكرات 1 و 2 و 3. 1

حدد قانون احتمال المتغير X_n .

التمرين 3: (3.5 نقطة)

نعتبر الفضاء المتجهي $(V_2, +, \cdot)$ الذي بعده 2.

ليكن (\vec{i}, \vec{j}) أساسا للفضاء V_2 . نضع: $\vec{e}_1 = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$ و $\vec{e}_2 = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$

ليكن * قانون التركيب الداخلي المعرف في V_2 بما يلي:

$$\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4 \quad (x\vec{i} + y\vec{j}) * (x'\vec{i} + y'\vec{j}) = (xx' + yy')\vec{i} + (xy' + yx')\vec{j}$$

0.25 (أ-1) بين أن (\vec{e}_1, \vec{e}_2) أساس للفضاء V_2

0.25 (ب) تحقق أن: $\vec{e}_1 * \vec{e}_1 = \vec{e}_1$ و $\vec{e}_2 * \vec{e}_2 = \vec{e}_2$ و $\vec{e}_1 * \vec{e}_2 = \vec{e}_2 * \vec{e}_1 = \vec{0}$

0.25 (ج) بين أن: $\forall (X, X', Y, Y') \in \mathbb{R}^4 \quad (X\vec{e}_1 + Y\vec{e}_2) * (X'\vec{e}_1 + Y'\vec{e}_2) = XX'\vec{e}_1 + YY'\vec{e}_2$

0.25 (أ-2) بين أن القانون * تبادلي.

0.25 (ب) بين أن القانون * تجميعي.

0.25 (ج) بين أن القانون * يقبل عنصرا محايدا.

0.25 (د) بين أن $(V_2, +, *)$ حلقة تبادلية واحدة.

3- ليكن $\vec{u} \in V_2 - \{0\}$. نعتبر: $E_{\vec{u}} = \{\lambda\vec{u} / \lambda \in \mathbb{R}\}$

0.25 (أ) بين أن $(E_{\vec{u}}, +)$ زمرة جزئية للزمرة $(V_2, +)$

0.25 (ب) بين أن $(E_{\vec{u}}, +, \cdot)$ فضاء متجهي جزئي للفضاء $(V_2, +, \cdot)$

0.5 (ج) بين أن: $E_{\vec{u}}$ مستقر بالنسبة للقانون * \Leftrightarrow الأسرة $(\vec{u} * \vec{u}, \vec{u})$ مقيدة.

4- نفترض أن: $\vec{u} * \vec{u} = \alpha\vec{u}$; $(\exists \alpha \in \mathbb{R}^*)$. نعتبر التطبيق $\varphi: \mathbb{R}^* \rightarrow E_{\vec{u}}$

$$x \mapsto \frac{x}{\alpha}\vec{u}$$

0.5 (أ) بين أن φ تشاكل تقابلي من (\mathbb{R}^*, \times) نحو $(E_{\vec{u}}, *)$

0.25 (ب) بين أن $(E_{\vec{u}}, +, *)$ جسم تبادلي.

التمرين 4: (10 نقط)

الجزء I: نعتبر الدالة g المعرفة على $I =]-1, +\infty[$ بما يلي: $g(x) = 1 + x^2 - 2x(1+x)\ln(1+x)$

0.25 (أ-1) بين أن: $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = 2$

0.5 (ب) بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

2- بين أن g قابلة للاشتقاق على I ، و أن: $(\forall x \in I) \quad g'(x) = -2(1+2x)\ln(1+x)$ 0.5

3- نعطي جدول تغيرات الدالة g :

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$		
$g'(x)$		-	0	+	0	-
$g(x)$	2		$\frac{5}{4} - \frac{\ln 2}{2}$	1		$-\infty$

(أ) بين أنه يوجد عدد حقيقي موجب قطعاً وحيد α بحيث: $g(\alpha) = 0$ 0.5

(ب) تحقق أن: $\alpha < 1$ (نأخذ: $\ln 2 = 0.7$) 0.25

(ج) استنتج أن: $0 < g(x)$ و $(\forall x \in]-1, \alpha[)$ و أن: $g(x) < 0$ $(\forall x \in]\alpha, +\infty[)$ 0.5

الجزء II : نعتبر الدالة f المعرفة على $I =]-1, +\infty[$ بما يلي: $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(أ-1) احسب $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها. 0.5

(ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها. 0.5

2- (أ) بين أن f قابلة للاشتقاق على I و أن $f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x)(1+x^2)^2}$ $(\forall x \in I)$ 0.75

(ب) اعط جدول تغيرات الدالة f على I 0.5

(ج) تحقق أن: $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$ و أن: $f(x) \leq \frac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$ $(\forall x \in I)$ 0.75

3- (أ) حدد معادلة المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة ذات الأفصول 0. 0.25

(ب) بين أن: $\ln(1+x) < x$ $(\forall x > 0)$ 0.5

(ج) استنتج أن: $f(x) < x$ $(\forall x > 0)$ 0.25

(د) مثل مبيانيا (T) و (C) . (نأخذ: $\alpha = 0.8$ و $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$) 1

الجزء III : نضع $J = \int_0^1 f(x) dx$

1 - أ) باستعمال تغيير المتغير: $t = \frac{1-x}{1+x}$ ، بين أن: $J = \frac{\pi}{8} \ln 2$

ب) حدد، بالسنتيمر مربع، مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C) و المستقيمت (T) و

$$x=1 \text{ و } x=0$$

2- باستعمال طريقة المكاملة بالأجزاء، احسب: $K = \int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x} dx$

انتهى



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2019
- عناصر الإجابة -

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

RR24

4	مدة الاجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية : (أ) و (ب)	الشعبة أو المسلك

سلم التثقيط	عناصر الإجابة	التمرين 1
0.25	$\Delta = \alpha^2$ هو: (E_α)	(أ) -I
0.5	حلا (E_α) هما: $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$ و $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$	(ب) -1
0.5	$\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\alpha = \alpha e^{i(\lambda+\frac{\pi}{3})}$; $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\alpha = \alpha e^{i(\lambda+\frac{2\pi}{3})}$	2
0.25x2	$R(M_1) = M_2$ و $R(\Omega) = M_1$	(أ) II
0.25	استنتاج.	(ب) -1
0.25	التحقق.	(أ)
0.5	تعامد (OM_1) و (ΩM_2)	(ب) -2
0.25	استنتاج.	(ج)
0.5	$\forall \theta \in \mathbb{R}, \frac{z_2 - \alpha}{z_1 - \alpha} \div \frac{z_2 - \alpha e^{i\theta}}{z_1 - \alpha e^{i\theta}} \in \mathbb{R}$	-3

سلم التثقيط	عناصر الإجابة	التمرين 2
1	نعتبر الحدث A: " الحصول على الكرات 1 و 2 و 3 بالتتابع و في هذا الترتيب " $P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega} = \frac{(n-2)(n-3)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$	-1
1	نعتبر الحدث B: " الحصول على الكرات 1 و 2 و 3 في هذا الترتيب (سواء كانت متتابعة أم غير متتابعة) " $P(B) = \frac{\text{Card } B}{\text{Card } \Omega} = \frac{C_n^3(n-3)!}{n!} = \frac{1}{3!}$	-2

1	$X_n(\Omega) = \{3, \dots, n\}$ $\forall k \in X_n(\Omega) \quad P(X_n = k) = \frac{\text{Card}(X_n = k)}{\text{Card}\Omega} = \frac{C_3^1 C_{k-1}^2 2A_{n-3}^{k-3} (n-k)!}{n!}$ $= \frac{3(k-1)(k-2)}{n(n-1)(n-2)}$	-3
---	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----

سلم التقييط	عناصر الإجابة	التمرين 3
0.25	V_2 أساس للفضاء (\vec{e}_1, \vec{e}_2)	(أ)
0.25	التحقق.	(ب) -1
0.25	$\forall (X, X', Y, Y') \in \mathbb{R}^4 \quad (X\vec{e}_1 + Y\vec{e}_2) * (X'\vec{e}_1 + Y'\vec{e}_2) = XX'\vec{e}_1 + YY'\vec{e}_2$	(ج)
0.25	تبادلية القانون *	(أ)
0.25	تجميعية القانون *	(ب)
0.25	هو العنصر المحايد بالنسبة للقانون *	(ج) -2
0.25	حلقة تبادلية واحدية.	(د)
0.25	زمرة جزئية للزمرة $(V_2, +)$	(أ)
0.25	فضاء متجهي جزئي للفضاء $(V_2, +, \cdot)$	(ب) -3
0.5	الاستلزام المباشر..... 0.25	(ج)
0.5	الاستلزام العكسي..... 0.25	
0.5	φ تشاكل من (\mathbb{R}^*, \times) نحو $(E_u, *)$ 0.25	(أ)
0.5	φ تقابل من \mathbb{R}^* نحو E_u 0.25	-4
0.25	جسم تبادلي $(E_u, +, *)$	(ب)

سلم التقييط	عناصر الإجابة	التمرين 4
0.25	$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = 2$	(أ) -1 -I

0.5	$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$	(ب)	
0.5	قابلية اشتقاق g على I 0.25 $g'(x) = -2(1+2x)\ln(1+x)$ $(\forall x \in I)$ 0.25	-2	
0.5	وجود α 0.25 وحدانية α 0.25	(أ)	
0.25	التحقق.	(ب)	-3
0.5	$0 < g(x)$ $(\forall x \in]-1, \alpha[)$ 0.25 $g(x) < 0$ $(\forall x \in]\alpha, +\infty[)$ 0.25	(ج)	
0.5	حساب $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ 0.25 التأويل المبياني للنتيجة 0.25	(أ)	-II -1
0.5	حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 0.25 التأويل المبياني للنتيجة 0.25	(ب)	
0.75	قابلية اشتقاق f على I 0.25 $f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x)(1+x^2)^2}$ $(\forall x \in I)$ 0.5	(أ)	
0.5	تغيرات f على I	(ب)	
0.75	التحقق: $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$ 0.5 $f(x) \leq \frac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$ $(\forall x \in I)$ 0.25	(ج)	-2
0.25	معادلة مماس (T) للمنحنى (C) في النقطة ذات الأضلاع 0	(أ)	-3
0.5	$\ln(1+x) < x$ $(\forall x > 0)$	(ب)	

0.25	الاستنتاج: $f(x) < x$ ($\forall x > 0$)	(ج)		
1	0.25..... (T) التمثيل المبياني للمستقيم	(د)		
	0.75..... (C) التمثيل المبياني للمنحنى			
1	تغيير المتغير: $J = \frac{\pi}{8} \ln 2$	(أ)		
0.5	$A = (\int_0^1 f(x) - x dx) \times u.a = (\int_0^1 (x - f(x)) dx) \times 4cm^2$ $= (2 - \frac{\pi \ln 2}{2}) cm^2$	(ب)	-1	-III
1	باستعمال مكاملة بالأجزاء، نحصل على: $K = \frac{\pi \ln 2}{8}$		-2	