الصفحة	
1 / 4	
**|	

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2020
- الموضوع –

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

SSSSSSSSSSSSSSSSSS | RS 24

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	المعامل	9

- المدة الزمنية لإنجاز الموضوع هي 4 ساعات.
- يتكون الموضوع من (4) صفحات مرقمة من 1/4 إلى 4/4
- يتكون الموضوع من أربعة تمارين مستقلة فيما بينها.
- **المترشح ملزم بانجاز التمرين3 و التمرين4 و الاختيار بين انجاز إما التمرين1 و إما التمرين2**
- **على المترشح أن ينجز في المجموع ثلاثة (3) تمارين:**

- **التمرين1** و يتعلق بالحسابيات **(اختياري)**.....**3.5 نقط**
  و إما
  التمرين2 ويتعلق بالبنيات الجبرية **(اختياري)**.....**3.5 نقط**

- **التمرين3** و يتعلق بالأعداد العقدية **(إجباري)**.....**3.5 نقط**

- **التمرين4** و يتعلق بالتحليل **(إجباري)**.....**13 نقطة**

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

اختر وأنجز إما التمرين1 وإما التمرين2

و أنجز إجباريا التمرين3 و التمرين4

التمرين 1:(3.5 نقط/اختياري) (إذا انجزت التمرين1 فلا ينبغي لك أن تنجز التمرين2)

ليكن p و q عددين أوليين يحققان : $p<q$ و $[pq]$ 1 9^{p+q-1} $\circ$

0.5 1- أ) بين أن p و 9 أوليان فيما بينهما.

1 ب) استنتج أن: $[p]$ 1 9^{p-1} $\circ$ و أن $[p]$ 1 9^{q} $\circ$

0.5 2- أ) بين أن $p-1$ و q أوليان فيما بينهما .

0.5 ب) باستعمال مبرهنة بوزو ، بين أن: $p=2$

0.5 3- أ) باستعمال مبرهنة فيرما ، بين أن : $[q]$ 1 9^{q-1} $\circ$

0,5 ب) استنتج أن: $q=5$

التمرين 2: (3.5 نقط/اختياري) **(إذا انجزت التمرين2 فلا ينبغي لك أن تنجز التمرين1)**

نرمز بالرمز $M_3(\mathbb{R})$ إلى مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 3 ذات معاملات حقيقية.

نذكر أن $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ فضاء متجهي حقيقي بعده 9 و أن $(M_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$ حلقة غير تبادلية و واحدية صفرها $O=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ و وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

نعتبر المجموعة الجزئية: $E=\left\{M(x,y,z)=\begin{pmatrix}x&-y&-y\\0&z&0\\y&x-z&x\end{pmatrix}/\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}$

الجزء الأول:

0.25 1-أ) بين أن E فضاء متجهي جزئي للفضاء $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$

0.5 ب) حدد أساسا للفضاء $(E,+,\times)$

2-أ) تحقق أن:

0.25 $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\forall (x',y',z')\in\mathbb{R}^3;\ M(x,y,z)\cdot M(x',y',z')=M(xx'-yy',xy'+yx',zz')$

0.5 ب) بين أن $(E,+,\cdot)$ حلقة تبادلية

الجزء الثاني:

نعتبر المجموعة الجزئية F من E للمصفوفات على الشكل $M(x,y,0)$ حيث $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

0.25 1– بين أن F زمرة جزئية للزمرة $(E,+)$

2- ليكن φ التطبيق المعرف من $\mathbb{C}^*$ نحو E بما يلي:

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\quad \varphi(x+iy)=M(x,y,0)$$

0.25 أ- بين أن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ نحو $(E,\cdot)$

0.5 ب- استنتج أن $(F^*,\cdot)$ زمرة تبادلية. $(F^*=F-\{O\})$

0.5 ج- بين أن $(F,+,\cdot)$ جسم تبادلي يتم تحديد وحدته.

0.25 3- أ) تحقق أن: $M(x,y,0)=O$; $\left(\forall M(x,y,0)\in F\right)$ $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

0.25 ب) استنتج أن لا أحد من عناصر المجموعة الجزئية F يقبل مقلوبا بالنسبة للضرب في $M_3(\mathbb{R})$

التمرين 3: (3.5 نقط/اجباري)

I- ليكن m عددا حقيقيا غير منعدم.

نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$، المعادلتين:

$(E): z^2 + 2z + 1 + m^2 = 0$ و $(F): z^3 + 2(1-i)z^2 + (1+m^2-4i)z - 2i(1+m^2) = 0$

0.5 1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E)

0.25 2- أ) بين أن المعادلة (F) تقبل حلا تخيليا صرفا يتم تحديده.

0.5 ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (F)

II- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقطتين: $A(-1+im)$ و $B(-1-im)$

لتكن Ω منتصف القطعة $[AB]$ و A' منتصف القطعة $[OB]$ و B' منتصف القطعة $[OA]$

الدوران الذي مركزه Ω و زاويته $\frac{\pi}{2}$ يحول A إلى $P(p)$ و الدوران الذي مركزه A' و زاويته $\frac{\pi}{2}$ يحول B إلى $Q(q)$ و الدوران الذي مركزه B' و زاويته $\frac{\pi}{2}$ يحول O إلى $R(r)$

1.5 1- بين أن: $p = -1+m$ و $q = \frac{1-i}{2}(-1-im)$ و $r = \overline{q}$

0.25 2- أ) تحقق أن: $q - r = -ip$

0.5 ب) استنتج أن: $OP = QR$ و أن المستقيمين (OP) و (QR) متعامدان.

التمرين 4: (13 نقطة/اجباري)

الجزء الأول:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I = [0,1]$ بما يلي: $f(x) = x\ln(2-x)$

و ليكن (C) تمثيلها المبياني في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$

0.75 1- أ) بين أن f قابلة للاشتقاق على I و أن: $\forall x \in I \; ; \; f'(x) = \ln(2-x) - \frac{x}{2-x}$

0.5 ب) بين أن الدالة المشتقة f' تناقصية قطعا على I

0.75 ج) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha \in]0;1[$ بحيث: $f'(\alpha) = 0$ و أن: $f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2-\alpha}$

0.75 2- أ) ادرس تغيرات f ، ثم اعط جدول تغيراتها.

0.5 ب) بين أن المنحنى (C) مقعر.

0.5 ج) بين أن: $\forall x \in I \; ; \; f(x) \le f'(t)(x-t) + f(t)$ $(\forall t \in I)$

0.5 د) استنتج أن لكل x من I : $f(x) \le x\ln 2$ و $f(x) \le -x+1$

0.5 3- أنشئ المنحنى (C) (نأخذ: $\|\vec{i}\| = 2cm$)

4- احسب، ب cm^2، مساحة جزء المستوى المحصور بالمنحنى و المستقيمات المعرفة بالمعادلات: $x=0$ و $x=1$ و $y=0$ — 0.75

الجزء الثاني:

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 2.

نعتبر الدالة f_n المعرفة على $I=[0,1]$ بما يلي: $f_n(x)=x^n\ln(2-x)$

1-أ) تحقق أن f_n موجبة على I و أن $f_n(0)=f_n(1)$ — 0.5

ب) بين أنه يوجد على الأقل $a_n \in]0,1[$ بحيث: $f_n'(a_n)=0$ — 0.5

2- أ) بين أن f_n قابلة للاشتقاق على I و أن: $f_n'(x)=x^{n-1}g_n(x)$; $\forall x\in I$ حيث: — 0.75

$$g_n(x)=n\ln(2-x)-\frac{x}{2-x}$$

ب) بين أن الدالة g_n تناقصية قطعا على I — 0.5

ج) استنتج أن a_n وحيد. — 0.5

3- نعتبر المتتالية $(a_n)_{n\geq 2}$ المعرفة حسب ما سبق.

أ) بين أن: $f_n(a_n)=\frac{1}{n}.\frac{a_n^{n+1}}{2-a_n}$; $\forall n\geq 2$، استنتج أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(a_n)=0$ — 1

ب) بين أن: $g_n(a_{n+1})=-\ln(2-a_{n+1})$; $\forall n\geq 2$ ، استنتج أن المتتالية $(a_n)_{n\geq 2}$ تزايدية قطعا. — 1

ج) بين أن المتتالية $(a_n)_{n\geq 2}$ متقاربة. — 0.25

د) بين أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=1$ — 0.5

الجزء الثالث:

لكل عدد صحيح طبيعي $n\geq 2$، نضع: $I_n=\int_0^1 f_n(x)dx$

1- بين أن المتتالية $(I_n)_{n\geq 2}$ تناقصية، استنتج أنها متقاربة. — 0.75

2- باستعمال مكاملة بالأجزاء، بين أن: $I_n=\frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{2-x}dx$ — 0.5

3- بين أن: $0\leq I_n\leq \frac{1}{n+1}$; $\forall n\geq 2$)، ثم استنتج أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$ — 0.75

انتهى

./.

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2020
- عناصر الإجابة –

RR 24

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	المعامل	9

انتباه:إذا أنجز المترشح التمرينين الاختياريين (بشكل كلي أو جزئي) تحتسب له فقط أحسن نقطة محصلة من بين النقطتين و ليس مجموع النقطتين.

التمرين1		عناصر الإجابة	سلم التنقيط
-1	أ)	استعمال مبرهنة بوزو أو بطريقة مباشرة	0.5
	ب)	توظيف مبرهنة فيرما.....0.5 نعوض في $[p]$ 1 9^{p-1+q} 1.....0.5	1
-2	أ)	لدينا $p-1<p<q$ و q عدد أولي	0.5
	ب)	يوجد $(u,v)\in\mathbb{Z}^2$ بحيث $uq=1+v(p-1)$ (مبرهنة بوزو) بما أن $[p]$ 1 9^{uq} 1 و $[p]$ 1 $9^{v(p-1)}$ 1 فإن $[p]$ 1 9 إذن p يقسم $8=2^3$	0.5
-3	أ)	$q\wedge 9=1$ و نستعمل مبرهنة فيرما	0.5
	ب)	نعوض p بالعدد 2 فنحصل على $[q]$ 1 9^{q+1} 1 و بما أن $[q]$ 1 9^{q-1} 1 فإن $[q]$ 1 9^2 1 إذن q يقسم $80=2^4\times 5$ و $q>2$ إذن $q=5$	0.5

التمرين2		عناصر الإجابة	سلم التنقيط
الجزء الأول			
-1	أ)	الخاصية المميزة لفضاء متجهي جزئي	0.25
	ب)	أسرة مولدة.....0.25 أسرة حرة.....0.25	0.5
-2	أ)	تحقق	0.25

	ب)	$(E,+)$ زمرة تبادلية E مستقر بالنسبة للضرب في $M_3(\mathbb{Z})$ قانون الضرب تجميعي و توزيعي بالنسبة للجمع حسب الاستقرار حسب 2- أ) قانون الضرب تبادلي في E	0.5
الجزء الثاني			
-1		الخاصية المميزة لزمرة جزئية	0.25
-2	أ)	φ تشاكل من $(\mathbb{Z}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$	0.25
	ب)	$\varphi(\mathbb{Z}^*)=F^*$ و $(\mathbb{Z}^*,\times)$ زمرة تبادلية	0.5
	ج)	$(F,+,\times)$ جسم تبادلي وحدته $\varphi(1)=M(1,0,0)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$	0.5
-3	أ)	تحقق	0.25
	ب)	ليس هناك عنصر من F منتظم بالنسبة للضرب في $M_3(\mathbb{Z})$	0.25

التمرين3			عناصر الإجابة	سلم التنقيط
I	-1		حلا (E) هما: $z_1=-1+im$ و $z_2=\overline{z_1}$	0.5
	-2	أ)	$2i$ هو الحل التخيلي الصرف	0.25
		ب)	الحلان الآخران للمعادلة (F) هما حلول (E): z_1 و z_2	0.5
II	-1		قيم p و q و r بدلالة m	0.5x3
	-2	أ)	التحقق	0.25
		ب)	$\lvert p\rvert=\lvert q-r\rvert$ و $\arg\frac{q-r}{p}\equiv-\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$	0.25x2

التمرين4		عناصر الإجابة	سلم التنقيط
الجزء الأول:			
-1	أ)	f قابلة للاشتقاق على I .....0.25 حساب الدالة المشتقة.....0.5	0.75
	ب)	الدالة المشتقة تناقصية قطعا على I	0.5
	ج)	وجود و وحدانية α .....0.5 $f(\alpha)=\frac{\alpha^2}{2-\alpha}$ 0.25	0.75
-2	أ)	تغيرات f .....0.5 جدول تغيرات f 0.25	0.75
	ب)	المشتقة الثانية سالبة (أو المشتقة الأولى تناقصية قطعا).	0.5
	ج)	يوجد المنحنى دائما تحت جميع مماساته.	0.5
	د)	حالة خاصة للمماسات عند النقط ذات الأفاصيل 0 و 1.	0.5
-3		التمثيل المبياني.	0.5
-4		حساب المساحة: $I=\left(\int_0^1 f(x)dx\right)\cdot 4cm^2=\left(2\ln 2-\frac{5}{4}\right)\cdot 4cm^2$	0.75
الجزء الثاني:			
-1	أ)	التحقق من أن f_n موجبة.....0.25 التحقق من أن $f_n(0)=f_n(1)=0$ 0.25	0.5
	ب)	تطبيق مبرهنة رول بالنسبة للدالة f_n على $[0;1]$	0.5
-2	أ)	f_n قابلة للاشتقاق.....0.25 حساب f_n' 0.5	0.75
	ب)	الدالة g_n تناقصية قطعا على I	0.5
	ج)	g_n تناقصية قطعا (تباينية)، و منه وحدانية α_n	0.5

-3	أ)	تعبير $f_n(\alpha_n)$ .....0.5 حساب النهاية: $0 < a_n < 1$ إذن $0 < \frac{(a_n)^{n+1}}{2 - a_n} < 1$ 0.5	1
	ب)	تعبير $g_n(\alpha_{n+1})$ .....0.5 رتابة المتتالية (α_n) 0.5	1
	ج)	المتتالية تزايدية و مكبورة	0.25
	د)	حساب النهاية.	0.5
الجزء الثالث:			
-1		المتتالية (I_n) تناقصية.....0.5 المتتالية مصغورة إذن متقاربة..... 0.25	0.75
-2		مكاملة بالأجزاء	0.5
-3		تأطير I_n .....0.5 حساب النهاية..... 0.25	0.75

./.