

| | | | |
|------------------------------|--|--------------------------------|--|
| الصفحة 1 5 ** | الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا الدورة العادية 2020 - الموضوع - | | الجمهورية المغربية وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي المركز الوطني للتقويم والامتحانات |
| SSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSS | | NS 24 | |
| 4 | مدة الإنجاز | الرياضيات | المادة |
| 9 | المعامل | شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) | الشعبة أو المسلك |

- المدة الزمنية لإنجاز الموضوع هي 4 ساعات.
- يتكون الموضوع من (5) صفحات مرقمة من 1/5 إلى 5/5
- يتكون الموضوع من أربعة تمارين مستقلة فيما بينها.
- المترشح ملزم بانجاز التمرين 3 و التمرين 4 و الاختيار بين انجاز إما التمرين 1 و إما التمرين 2
- على المترشح أن ينجز في المجموع ثلاثة (3) تمارين:
 - التمرين 1 و يتعلق بالحسابيات (اختياري).....3.5 نقط
 - و إما
 - التمرين 2 ويتعلق بالبنيات الجبرية (اختياري).....3.5 نقط
 - التمرين 3 و يتعلق بالأعداد العقدية (إجباري).....3.5 نقط
 - التمرين 4 و يتعلق بالتحليل (إجباري).....13 نقطة

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

اختر وأنجز إما التمرين 1 وإما التمرين 2

و أنجز إجباريا التمرين 3 و التمرين 4

التمرين 1: (3.5 نقط/ اختياري) (إذا اخترت إنجاز التمرين 1 فلا تنجز التمرين 2)

نعتبر في \mathcal{C} و \mathcal{R} المعادلة $7x^3 - 13y = 5$: (D)

1- ليكن (x, y) من \mathcal{C} و \mathcal{R} حلا للمعادلة (D)

أ) بين أن x و 13 أوليان فيما بينهما. 0.5

ب) استنتج أن: [13] $x^{12} \equiv 1$ 0.5

ج) بين أن: [13] $x^3 \equiv 10$ 1

د) استنتج أن: [13] $x^{12} \equiv 3$ 0.5

| | | | |
|--------|---|-------|--|
| الصفحة | 2 | NS 24 | الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2020 - الموضوع - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) |
| 5 | | | |

1-2 استنتج من الأسئلة السابقة أن المعادلة (D) لا تقبل حلا في $\mathbb{C} \setminus \emptyset$

التمرين 2: (3.5 نقطة/اختياري) (إذا اخترت إنجاز التمرين 2 فلا تنجز التمرين 1)

نرمز بالرمز $(M_2(i), \cdot)$ لمجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة الثانية.

نذكر أن $(M_2(R), +, \cdot)$ حلقة غير تبادلية وواحدية وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ وأن (i, \cdot) زمرة تبادلية.

نعتبر المجموعة الجزئية E من $(M_2(i), \cdot)$ المعرفة بما يلي:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 1 & y \end{pmatrix} \mid x, y \in i \right\}$$

0.5 1-أ) بين أن E جزء مستقر من $(M_2(i), \cdot)$

0.5 ب) بين أن الضرب غير تبادلي في E

0.5 ج) تحقق أن: $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 1 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' & 0 \\ 1 & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' & 0 \\ x+y' & yy' \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 1 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' & 0 \\ 1 & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' & 0 \\ x+y' & yy' \end{pmatrix}$

0.5 2- بين أن (E, \cdot) زمرة غير تبادلية.

3- نعتبر المجموعة الجزئية F من E المعرفة بما يلي:

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 1 & x \end{pmatrix} \mid x \in i \right\}$$

0.5 أ) بين أن التطبيق j المعرفة بما يلي: $j(x) = M(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 1 & x \end{pmatrix}$; $j(x)$ تشاكل من (i, \cdot) نحو (E, \cdot)

1 ب) استنتج أن (F, \cdot) زمرة تبادلية يجب تحديد عنصرها المحايد.

التمرين 3: (3.5 نقط/اجباري)

ليكن m عدد عقدي غير منعدم.

الجزء الأول:

نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z ، $z^3 - 2mz^2 + 2m^2z - m^3 = 0$ (E)

0.5 1- حل في \mathbb{C} المعادلة (E) (لاحظ أن m حلا للمعادلة (E))

2- ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) المخالفين للحل m

0.25 أ) تحقق أن: $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{m}$

0.5 ب) في حالة: $m = 1 + e^{i\frac{p}{3}}$ ، أكتب على الشكل الجبري z_1 و z_2

الجزء الثاني:

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O; u, v)$

نعتبر النقط A و B ذات الألفاق على التوالي: $a = m e^{i\frac{p}{3}}$ و $b = m e^{-i\frac{p}{3}}$

ليكن P مركز الدوران الذي زاويته $\frac{\pi p}{2\theta}$ و يحول O إلى A

و Q مركز الدوران الذي زاويته $\frac{\pi p}{2\theta}$ و يحول A إلى B

و R مركز الدوران الذي زاويته $\frac{\pi p}{2\theta}$ و يحول B إلى O

1- بين أن النقط O و A و B غير مستقيمة. 0.25

2- أ) بين أن لحق P هو: $p = m \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{7p}{12}}$ وأن لحق R هو: $r = m \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{7p}{12}}$ 1

ب) بين أن لحق Q هو: $q = m \sqrt{2} \sin \frac{\pi p}{12}$ 0.5

3- بين أن $OQ = PR$ و أن المستقيمين (OQ) و (PR) متعامدان. 0.5

التمرين 4: (13 نقطة/إجباري)

الجزء الأول:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I = [0; +\infty[$ بما يلي:

$$f(x) = x^3 \ln \frac{x}{1} + \frac{1}{x}, \quad x \in]0; +\infty[\text{ و } f(0) = 0$$

و ليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O; i, j)$ (نأخذ: $\|i\| = \|j\| = 1 \text{ cm}$)

1- بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة f $\ln(t)$ في المجال $[x, x+1]$ ، بين أن: 0.5

$$(P) \quad (x \in]0; +\infty[) ; \quad \frac{1}{x+1} < \ln \frac{x}{1} + \frac{1}{x} < \frac{1}{x}$$

2- أ) باستعمال العبارة (P) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 0.5

ب) باستعمال العبارة (P) بين أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجيميا يتم تحديد اتجاهه. 0.5

| | | | |
|--------|---|-------|--|
| الصفحة | 4 | NS 24 | الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2020 - الموضوع - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) |
| 5 | | | |

0.75 3- (أ) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]p; +\infty[$ وأن :

$$f'(x) = 3x^2 \ln(1+x) + \frac{1}{x} - \frac{1}{3(1+x)^2} \quad (x \in]p; +\infty[)$$

0.5 (ب) استنتج أن الدالة f تزايدية قطعاً على I (يمكن استعمال العبارة (P))

0.25 (ب) اعط جدول تغيرات f

4- لكل x من المجال $]p; +\infty[$ نضع: $g(x) = \frac{f(x)}{x}$

0.75 (أ) تحقق أن: $g'(x) = 2x \ln(1+x) + \frac{1}{x} - \frac{1}{2(1+x)^2} \quad (x \in]p; +\infty[)$

ثم استنتج أن الدالة g تزايدية قطعاً على $]p; +\infty[$

0.5 (ب) بين أن المعادلة $g(x) = 1$ تقبل على $]p; +\infty[$ ، حلاً وحيداً نرسم إليه بالرمز a

ثم تحقق أن a ينتمي إلى المجال $]2; 3[$ (نأخذ: $\ln 2 = 0.7$ و $\ln \frac{3}{2} = 1.5$)

0.5 (د) استنتج أن الحلول الوحيدة للمعادلة $f(x) = x$ هي: 0 و a

0.5 5- (أ) مثل مبيانيا المنحنى (C)

(حدد نصف المماس على اليمين في النقطة O و الفرع الشلجي للمنحنى (C))

0.25 (ب) بين أن الدالة f تقابل من I نحو I (نرمز بالرمز f^{-1} لتقابلها العكسي)

الجزء الثاني:

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي: $0 < u_0 < a$ و لكل n من \mathbb{N} ، $u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$

0.5 1- بين بالترجع أن: $0 < u_n < a \quad (n \in \mathbb{N})$

0.5 2- (أ) بين أن: $g(p; a) =]p; 1[$

0.5 (ب) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ تزايدية قطعاً.

0.25 (ج) بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة.

0.5 3- حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

الجزء الثالث:

نعتبر الدالة F المعرفة على المجال I بما يلي: $F(x) = \int_x^1 f(t) dt \quad (x \in I)$

| | | | |
|--------|-------|---|--|
| الصفحة | NS 24 | الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2020 - الموضوع | |
| 5 | | - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) | |

1- أدرس حسب قيم x ، إشارة $F(x)$ 0.5

(ب) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على I و حدد مشتقتها الأولى F' 0.5

(ج) استنتج أن F تناقصية قطعاً على I 0.25

2- أ) بين أن: $F(x) \leq (1-x) \ln 2$; $x \in [1; +\infty[$ 0.5

(ب) استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ 0.25

3- أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء، بين أن: 0.5

$$F(x) = \frac{\ln 2}{4} - \frac{x^4}{4} \ln \frac{x}{1+x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{4} \int_{x}^{1} \frac{t^3}{t+1} dt$$

(ب) أحسب $\int_{x}^{1} \frac{t^3}{t+1} dt$ لكل $x \in]-\infty; 1[$ (لاحظ أن: $\frac{t^3}{1+t} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t}$) 0.5

(ج) استنتج أن: $F(x) = \frac{5}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{8} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \ln(1+x) - \frac{x^4}{4} \ln \frac{x}{1+x} + \frac{1}{x}$ 0.5

(د) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ ثم استنتج قيمة: $\int_0^1 f(t) dt$ 0.5

$$v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)}{2n} \quad n \text{ منعدم طبيعي غير منعدم } n \text{ نضع: } F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) = \frac{1}{2n} \int_{\frac{2k+1}{2n}}^{\frac{2k+1}{2n}} f(t) dt$$

أ) بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي n من \mathbb{N}^* و لكل عدد صحيح طبيعي k من $\{0, 1, \dots, n-1\}$: 0.5

$$-\frac{1}{2n} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq \frac{1}{2n} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)$$

(ب) استنتج أن: $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2n} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq v_n \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)$ 0.5

$$\left(\frac{2k+1}{2n} < \frac{k+1}{n} \right) \text{ (لاحظ أن:)}$$

(ج)- بين أن المتتالية العددية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متقاربة ثم حدد نهايتها. 0.25

انتهى

| | |
|--------|---|
| الصفحة | 1 |
| 4 | |
| **1 | |

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2020
- عناصر الإجابة -

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المعنى
والتعليم العالي والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS

NR 24

| | | | |
|---|-------------|--------------------------------|------------------|
| 4 | مدة الإنجاز | الرياضيات | المادة |
| 9 | المعامل | شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) | الشعبة أو المسلك |

إنتباه: إذا أنجز المترشح التمرينين الاختياريين (بشكل كلي أو جزئي) تحتسب له فقط أحسن نقطة محصلة من بين النقطتين و ليس مجموع النقطتين.

| التمرين 1 | عناصر الإجابة | سلم التنقيط |
|-----------|---|-------------|
| -1 | أ) إذا كان d قاسما مشتركا موجبا للعددين x و 13 فإنه قاسم مشترك للعددين 13 و 5 ، و منه $d = 1$ | 0.5 |
| | ب) 13 أولي و لا يقسم x و نطبق مبرهنة فيرما | 0.5 |
| | ج) لدينا: $[13] \mid 5 \cdot 7x^3$ إذن $[13] \mid 5 \cdot 7$ لأن $x^3 \not\equiv 0 \pmod{13}$ | 1 |
| | د) لدينا: $[13] \mid 10 \cdot x^3$ إذن $[13] \mid 10^4 \cdot (x^3)^4$ و منه $[13] \mid 3 \cdot x^{12}$ | 0.5 |
| -2 | إذا كان $\phi \in \phi'$ حل للمعادلة (D) فإنه حسب السؤال 1- لدينا $[13] \mid 1 \cdot x^{12}$ و $[13] \mid 3 \cdot x^{12}$ إذن $[13] \mid 3 \cdot 1$ و هذا غير ممكن. | 1 |

| التمرين 2 | عناصر الإجابة | سلم التنقيط |
|-----------|--|-------------|
| -1 | أ) استقرار E في $(M_2(i), ')$ | 0.5 |
| | ب) البرهان على عدم تبادلية الضرب في E | 0.5 |
| | ج) التحقق | 0.5 |
| -2 | $(E, ')$ زمرة غير تبادلية | 0.5 |
| -3 | أ) Z تشاكل | 0.5 |
| | ب) Z تشاكل و $F = (i^*) = Z$ و $(i^*, ')$ زمرة تبادلية..... 0.5 العنصر المحايد هو $I = (1) = Z$ 0.5 | 1 |

| التمرين 3 | عناصر الإجابة | سلم التنقيط |
|--------------|--|-------------|
| الجزء الأول: | | |
| -1 | لدينا: $(E) \hat{U} (z - m)(z^2 - mz + m^2) = 0$ بالإضافة إلى الحل m نجد الحلين: $\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}m = e^{i\frac{p}{3}}m$ و $\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}m = e^{-i\frac{p}{3}}m$ | |

| | | |
|--------|-------|--|
| الصفحة | NR 24 | الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2020 - عناصر الإجابة - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) |
| 2 | | |
| 4 | | |

| | | | |
|---------------|--|-----|----|
| 0.25 | لدينا: $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} = \frac{m}{m^2}$ | (أ) | -2 |
| 0.5 | نجد $z_1 = i\sqrt{3}$ و $z_2 = \sqrt{3}\frac{\pi\sqrt{3}}{2} - i\frac{1\sqrt{3}}{2}$ | (ب) | |
| الجزء الثاني: | | | |
| 0.25 | النقط O و A و B غير مستقيمة | | -1 |
| 1 | 0.5..... حساب p | (أ) | -2 |
| | 0.5..... حساب r | | |
| 0.5 | حساب q | (ب) | |
| 0.5 | لدينا: $\frac{p-r}{q} = i$ و نستنتج أن: $OQ = PR$ 0.25..... | | -3 |
| | 0.25..... $(OQ)^{\wedge} (PR)$ | | |

| سلم التقييم | عناصر الإجابة | التمرين 4 | |
|--------------|---|-----------|----|
| الجزء الأول: | | | |
| 0.5 | 0.25..... $\ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{c_x}$; $\ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{c_x}$ | -1 | |
| | 0.25..... التأيير: $\frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$ | | |
| 0.5 | لدينا: $\frac{x^2}{1+x} < \frac{f(x)}{x} < x$ إذن $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$ | (أ) -2 | |
| 0.5 | لدينا: $\frac{x^2}{1+x} < \frac{f(x)}{x} < x$ إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ | (ب) | |
| 0.75 | 0.25..... الدالة قابلة للاشتقاق | (أ) | -3 |
| | 0.25..... حساب $f'(x)$ | | |
| 0.5 | لدينا: $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{3(1+x)} > \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} > 0$ | (ب) | |
| | إذن: $f'(x) > 0$ | | |
| 0.25 | جدول تغيرات f | (ج) | |
| 0.75 | 0.5..... حساب $g'(x)$ | (أ) -4 | |

| | | |
|--------|-------|--|
| الصفحة | NR 24 | الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2020 - عناصر الإجابة - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) |
| 3 | | |
| 4 | | |

| | | | |
|----------------------|-----|---|----|
| | | لدينا: $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{1}{2(1+x)}$ $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > 0$ إذن: | |
| 0.25 | | $g'(x) > 0$ | |
| 0.5 | (ب) | مبرهنة القيم الوسيطة تعطي وجود a و الرتبة القطعية للدالة g تعطي وحدانيته أو كذلك g تقابل من $]0; +\infty[$ إلى $]0; +\infty[$ | |
| 0.25 | | نتحقق من $g(1) < 1 < g(2)$ | |
| 0.5 | (د) | حلول المعادلة: $f(x) = x \hat{=} x = 0$ () أو | |
| 0.5 | (أ) | إنشاء المنحنى | -5 |
| 0.25 | (ب) | f تقابل من I نحو I | |
| الجزء الثاني: | | | |
| 0.5 | | الترجع و f^{-1} تزايدية و كون $f^{-1}(a) = a$ و $f^{-1}(0) = 0$ | -1 |
| 0.5 | (أ) | $g(D; a) =]0; 1[$ | |
| 0,5 | (ب) | من أجل $0 < x < a$ ، لدينا $0 < g(x) < 1$ بما أن $0 < u_n < a$ فإن $0 < f(u_n) < u_n$ إذن: $0 < u_n < f^{-1}(u_n) = u_{n+1}$ | -2 |
| 0.25 | (ج) | متتالية تزايدية و مكبورة | |
| 0.5 | | إذا وضعنا: $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ فإن $0 < u_0 \leq l \leq a$ لأن $0 < u_0 < u_n < a$; $(n^3 - 1)$ و بما أن f^{-1} متصلة على $[0; a]$ (و بالخصوص في l) فإن l هي حل المعادلة $f(x) = l$ إذن $l = a$ | -3 |
| الجزء الثالث: | | | |
| 0.5 | (أ) | لدينا $f(x)^3 \geq 0$ إذن F موجبة من أجل $1 \leq x \leq 0$ و سالبة من أجل $1 \leq x^3$ | |
| 0.5 | (ب) | F قابلة للاشتقاق على I | -1 |
| 0.25 | (ج) | $F'(x) = -f(x)$; $(x \in I)$ | |
| 0.5 | (أ) | لدينا: $f(x)^3 \ln 2$; $x^3 - 1$ إذن $\int_1^x f(t) dt^3 = (x-1) \ln 2$ | -2 |
| 0.25 | (ب) | $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = -\infty$ | |
| 0.5 | (أ) | مكاملة بالأجزاء | |
| 0.5 | (ب) | $\int_0^1 \frac{t^3}{t+1} dt = \frac{5}{6} - \ln 2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + \ln(1+x)$ | -3 |
| 0.5 | (ج) | المتساوية | |

| | | | |
|------|--|-----|----|
| 0.5 | $0.25 \dots \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \frac{5}{24}$ | (د) | |
| 0.5 | $0.25 \dots \int_0^1 f(t) dt = F(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \frac{5}{24}$: إذن F متصلة على اليمين في 0 | | |
| 0.5 | تطبيق مبرهنة أو متفاوتة التزايدات المنتهية على الدالة f في المجال $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ مع $f(\frac{k}{n}) = \frac{2k+1}{2n}$; $f(\frac{k+1}{n}) = \frac{2k+3}{2n}$ | (أ) | -4 |
| 0.5 | نلاحظ أن: $\frac{2k+1}{2n} < \frac{k+1}{n}$ | (ب) | |
| 0.25 | $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} f(\frac{k}{n}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f(\frac{k}{n})$ و $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} f(\frac{k}{n})$ المتصلة على القطعة $[0,1]$ إذن المتتاليتين $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f(\frac{k}{n})$ و $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} f(\frac{k}{n})$ متقاربتين و لهما نفس النهاية التي هي $F(0) = \int_0^1 f(x) dx = \frac{5}{24}$ و منه المتتالية (v_n) متقاربة (خاصية تآطير النهايات) و نهايتها $-\frac{1}{2} F(0) = -\frac{5}{48}$ | (ح) | |