الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2020
- الموضوع -

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS | RS 25

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة بالفرنسية)	الشعبة أو المسلك

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte (4) pages numérotées de 1/4 à 4/4
- L'épreuve est composée de quatre exercices indépendants entre eux.
- **Le candidat doit traiter EXERCICE3 et EXERCICE4 et choisir de traiter EXERCICE1 ou bien EXERCICE2.**
- **Le candidat doit traiter au total trois (3) exercices** :

- **EXERCICE1** qui concerne l'arithmétique **(au choix)**...........................**3.5 points**
  ou bien
  EXERCICE2 qui concerne les structures algébriques **(au choix)...3.5 points**

- EXERCICE3 qui concerne les nombres complexes **(obligatoire)**......**3.5 points**

- EXERCICE4 qui concerne l'analyse **(obligatoire)**.................................**13 points**

L'usage de la calculatrice est strictement interdit

Tu choisis de traiter EXERCICE1 ou bien EXERCICE2

Tu traites obligatoirement EXERCICE3 et EXERCICE4

<u>EXRECICE1</u> :(3.5points/au choix)

Si tu choisis de traiter EXERCICE1 il ne faut pas traiter EXERCICE2

Soients p et q deux nombres premiers vérifiant : $p < q$ et $9^{p+q-1} \equiv 1 \ [pq]$

0.5 1-a) Montrer que p et 9 sont premiers entre eux.

1 b) En déduire que : $9^{p-1} \equiv 1 \ [p]$ et que $9^{q} \equiv 1 \ [p]$

0.5 2-a) Montrer que $p-1$ et q sont premiers entre eux.

1 b) En utilisant le théorème de BEZOUT, montrer que : $p = 2$

0.5 3-a) En utilisant le théorème de FERMAT, montrer que : $9^{q-1} \equiv 1 \ [q]$

0.5 b) En déduire que : $q = 5$

<u>EXERCICE2</u> : (3.5 points/au choix)

Si tu choisis de traiter EXERCICE2 il ne faut pas traiter EXERCICE1

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices d'ordre 3 à coefficients réels.

On rappelle que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel de dimension 9 et que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau non commutatif unitaire de zéro $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On considère le sous-ensemble : $E = \left\{ M(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & -y & -y \\ 0 & z & 0 \\ y & x-z & x \end{pmatrix} / (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

<u>Première partie</u> :

0.25 1- a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$

0.5 b) Déterminer une base de $(E,+,\cdot)$

0.25 2- a) Vérifier que :

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \forall (x',y',z') \in \mathbb{R}^3 \ ; \ M(x,y,z) \times M(x',y',z') = M(xx'-yy', xy'+yx', zz')$

0.5 b) Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif

<u>Deuxième partie</u> :

On considère le sous-ensemble F de E des matrices de la forme $M(x,y,0)$ où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

0.25 1- Montrer que F est un sous-groupe du groupe $(E,+)$

2- On note φ l'application de $\mathbb{C}^*$ vers E définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad \varphi(x+iy) = M(x,y,0)$$

0.25 a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E,\times)$

0.5 b) En déduire que $(F^*,\times)$ est un groupe commutatif. (F^* désigne $F - \{O\}$)

0.5 c) Montrer que $(F,+,\times)$ est un corps commutatif dont on précisera l'unité.

0.25 3- a) Vérifier que : $(\forall M(x,y,0) \in F) \quad ; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} M(x,y,0) = O$

0.25 b) En déduire qu'aucun des éléments du sous-ensemble F n'admet un inverse pour la multiplication dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

EXERCICE3 :(3.5 points/obligatoire)

I- Soit m un nombre réel non nul.

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, les deux équations :

$$(E): z^2+2z+1+m^2=0 \quad \text{et} \quad (F): z^3+2(1-i)z^2+\left(1+m^2-4i\right)z-2i\left(1+m^2\right)=0$$

0.5 1- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

0.25 2- a) Montrer que l'équation (F) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.

0.5 b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (F)

II- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$

On considère les deux points : $A(-1+im)$ et $B(-1-im)$

Soient Ω le milieu du segment $[AB]$, A' le milieu du segment $[OB]$ et B' le milieu du segment $[OA]$

La rotation de centre Ω et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ transforme A en $P(p)$, La rotation de centre A' et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ transforme B en $Q(q)$ et La rotation de centre B' et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ transforme O en $R(r)$

1.5 1- Montrer que : $p=-1+m$, $q=\frac{1-i}{2}(-1-im)$ et $r=\overline{q}$

0.25 2- a) Vérifier que : $q-r=-ip$

0.5 b) En déduire que : $OP=QR$ et que les deux droites (OP) et (QR) sont orthogonales.

EXERCICE4 : (13 points/obligatoire)

Première partie :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I=[0,1]$ par $f(x)=x\ln(2-x)$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

0.75 1-a) Montrer que f est dérivable sur I et que : $\forall x\in I \;;\; f'(x)=\ln(2-x)-\frac{x}{2-x}$

0.5 b) Montrer que la fonction dérivée f' est strictement décroissante sur I

0.75 c) Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha\in\,]0;1[$ tel que : $f'(\alpha)=0$ et que $f(\alpha)=\frac{\alpha^2}{2-\alpha}$

0.75 2-a) Etudier les variations de f , puis donner son tableau de variations.

0.5 b) Montrer que la courbe (C) est concave.

0.5 c) Montrer que : $(\forall t\in I)$, $(\forall x\in I)$; $f(x)\le f'(t)(x-t)+f(t)$

0.5 d) En déduire que : $(\forall x \in I)$; $f(x) \leq x\ln 2$ et $f(x) \leq -x+1$

0.5 3- Représenter la courbe (C) (On prendra : $\|\vec{i}\| = 2cm$)

0.75 4- Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives : $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$

Deuxième partie :

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction f_n définie sur $I = [0,1]$ par : $f_n(x) = x^n \ln(2-x)$

0.5 1-a) Vérifier que f_n est positive sur I et que $f_n(0) = f_n(1)$

0.5 b) Montrer qu'il existe au moins $\alpha_n \in]0,1[$ tel que : $f_n'(\alpha_n) = 0$

0.75 2- a) Montrer que f_n est dérivable sur I et que : $\forall x \in I;$ $f_n'(x) = x^{n-1}g_n(x)$ où :

$$g_n(x) = n\ln(2-x) - \frac{x}{2-x}$$

0.5 b) Montrer que la fonction g_n est strictement décroissante sur I

0.5 c) En déduire que α_n est unique.

3- On considère la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ ainsi définie.

1 a) Montrer que : $\forall n \geq 2;$ $f_n(\alpha_n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\alpha_n^{n+1}}{2-\alpha_n}$, en déduire que : $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(\alpha_n) = 0$

1 b) Montrer que : $\forall n \geq 2$ $g_n(\alpha_{n+1}) = -\ln(2-\alpha_{n+1})$, en déduire que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante.

0.25 c) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est convergente.

0.5 d) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = 1$

Troisième partie :

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose : $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$

0.75 1- Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 2}$ est décroissante en déduire qu'elle est convergente.

0.5 2- En utilisant une intégration par parties , montrer que : $I_n = \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{2-x}dx$

0.75 3- Montrer que : $(\forall n \geq 2)$; $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$, en déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2020
- عناصر الإجابة -

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS | RR 25

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة بالفرنسية)	المعامل	9

N.B : Si un candidat traite les deux exercices qui sont au choix (totalement ou partiellement) on lui attribue la meilleure note obtenue parmi les deux notes (et non pas la somme des deux notes).

EXERCICE1		Indications de solutions	Barème
1-	a)	On utilise le théorème de BEZOUT ou directement	0.5
	b)	On applique le théorème de FERMAT……………………………………0.5 On remplace dans $9^{p-1+q} \equiv 1 \quad [p]$ ……………………………………0.5	1
2-	a)	On a $p-1 < p < q$ et q premier	0.5
	b)	il existe $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $uq = 1 + v(p-1)$ et $9^{uq} \equiv 1 \quad [p]$ et $9^{v(p-1)} \equiv 1 \quad [p]$ donc $9 \equiv 1 \quad [p]$ donc p divise $8 = 2^3$ ………	0.5
3-	a)	$q \wedge 9 = 1$ et on utilise le théorème de théorème de FERMAT	0.5
	b)	Si on remplace p par 2 on obtient $9^{q+1} \equiv 1 \quad [q]$ Et puisque $9^{q-1} \equiv 1 \quad [q]$ donc $9^2 \equiv 1 \quad [q]$ donc q divise $80 = 2^4 \times 5$ et $q > 2$ donc $q = 5$	0.5

EXERCICE2		Indications de solutions	Barème
Première partie			
1-	a)	Propriété caractéristique d'un s.e.v	0.25
	b)	Une famille génératrice……………………………………0.25 On montre qu'elle est libre………………………………0.25	0.5

2-	a)	Vérification	0.25
	b)	$(E,+)$ groupe commutatif E stable pour la multiplication dans $M_3(\mathbb{R})$ La loi multiplicative est associative et distributive par rapport à l'addition d'après la stabilité La loi multiplicative est commutative dans E d'après 2-a)	0.5
Deuxième partie			
1-		Propriété caractéristique d'un sous-groupe	0.25
2-	a)	φ morphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E,\times)$	O.25
	b)	$\varphi(\mathbb{C}^*)=F^*$ et $(\mathbb{C}^*,\times)$ groupe commutatif	0.5
	c)	$(F,+,\times)$ corps commutatif d'unité $\varphi(1)=M(1,0,0)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$	0.5
3-	a)	Vérification	0.25
	b)	Aucun élément de F n'est régulier pour la multiplication dans $M_3(\mathbb{R})$	0.25

EXERCICE3			Indications de solutions	Barème
I-	1-		Les deux solutions de (E) sont : $z_1=-1+im$ et $z_2=\overline{z_1}$	0.5
	2-	a)	$2i$ est la solution imaginaire pure.	0.25
		b)	Les deux autres solutions de (F) sont celles de (E) : z_1 et z_2	0.5
II-	1-		Les valeurs de $p, q\, et\, r$ en fonction de m	0.5x3
	2-	a)	Vérification	0.25
		b)	$\lvert p\rvert=\lvert q-r\rvert$ et $\arg\frac{q-r}{p}\equiv-\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$	0.25x2

EXERCICE4		Indications de solutions	Barème
Première partie :			
1-	a)	f dérivable sur I ....0.25 Calcul de la fonction dérivé..........0.5	0.75
	b)	La fonction dérivé est strictement décroissante sur I	0.5
	c)	Existence et unicité de α ....0.5 $f(\alpha)=\frac{\alpha^2}{2-\alpha}$ 0.25	0.75
2-	a)	Variations de f ....0.5 T.V de f 0.25	0.75
	b)	La dérivé seconde est négative(ou la dérivé première est strictement décroissante)	0.5
	c)	La courbe est toujours au dessous de ses tangentes	0.5
	d)	Cas particulier des tangentes au points d'abscisse 0 et 1	0.5
3-		Représentation graphique	0.5
4-		Calcul de surface : $I=\left(\int_0^1 f(x)dx\right)\cdot 4cm^2=\left(2\ln 2-\frac{5}{4}\right)\cdot 4cm^2$	0.75
Deuxième partie :			
1-	a)	Vérification que f_n est positive..........0.25 Vérification que $f_n(0)=f_n(1)=0$ 0.25	0.5
	b)	Application du théorème de ROLLE à la fonction f_n sur $[0;1]$	0.5
2-	a)	f_n dérivable..........0.25 Calcul de $f_n^{'}$ 0.5	0.75
	b)	La fonction g_n est strictement décroissante sur I I	0.5

	c)	g_n est strictement décroissante (injective) d'où l'unicité de α_n	0.5
3-	a)	Expression de $f_n(\alpha_n)$ ....0.5 Calcul de limite $0 < a_n < 1$ donc $0 < \frac{(a_n)^{n+1}}{2-a_n} < 1$.............. 0.5	1
	b)	Expression de $g_n(\alpha_{n+1})$ ....0.5 Monotonie de la suite (α_n) 0.5	1
	c)	Suite croissante et majorée	0.25
	d)	Calcul de limite	0.5
Troisième partie :			
1-		La suite (I_n) est décroissante ....0.5 La suite est minorée donc convergente............................0.25	0.75
2-		Intégration par parties	0.5
3-		Encadrement de I_n .... 0.5 Calcul de limite..0.25	0.75

·/·