

الصفحة	1	<b>الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا</b> <b>المسالك الدولية</b> <b>الدورة العادية 2021</b> <b>- الموضوع -</b>		الجمهورية المغربية وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي المركز الوطني للتقويم والامتحانات	
4	**			SSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSS	NS 24F
4h	مدة الإنجاز			الرياضيات	
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)		الشعبة أو المسلك	

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.

- L'épreuve comporte 3 exercices indépendants.

- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- L'exercice1 se rapporte à l'analyse .....(12 pts)

- L'exercice2 se rapporte aux nombres complexes.....(4 pts)

- L'exercice3 se rapporte à l'arithmétique .....(4 pts)

**L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé**

**L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé**

الصفحة	2	NS 24F	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2021 - الموضوع - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)
4			

**EXERCICE1** : (12 points)

Pour tout entier naturel  $n$ , on considère la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f_n(x) = \frac{-2e^x}{1+e^x} + nx$$

Soit  $(C_n)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

(On prendra  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$ )

**Partie I :**

0.5 1-a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_n(x) - nx + 2)$  puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.5 b) Montrer que la courbe  $(C_n)$  admet, en  $-\infty$ , une asymptote  $(\Delta_n)$  dont on déterminera une équation cartésienne.

0.5 2-a) Montrer que la fonction  $f_n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; f_n'(x) = \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2} + n$$

0.5 b) Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \frac{4e^x}{(1+e^x)^2} \leq 1$

0.5 c) En déduire le sens de variation de la fonction  $f_n$  sur  $\mathbb{R}$

(On distinguera les deux cas :  $n=0$  et  $n \geq 1$ )

0.5 3-a) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe  $(C_n)$  au point  $I$  d'abscisse 0

0.5 b) Montrer que le point  $I$  est le seul point d'inflexion de la courbe  $(C_n)$

0.5 4- Représenter graphiquement dans le même repère, les deux courbes  $(C_0)$  et  $(C_2)$ .

5- Pour tout réel  $t > 0$ , on pose  $A(t)$  l'aire du domaine plan limité par  $(C_n)$

et les droites d'équations respectives :  $y = nx - 2$ ,  $x = 0$  et  $x = t$

0.5 a) Calculer  $A(t)$  pour tout  $t > 0$

0.5 b) Calculer  $\lim_{t \rightarrow +\infty} A(t)$

**Partie II :**

On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f_0(u_n)$$

0.5 1-a) Montrer que l'équation  $f_0(x) = x$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$

0.5 b) Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; |f_0'(x)| \leq \frac{1}{2}$

0.5 2-a) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$

الصفحة	3	NS 24F	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2021 - الموضوع - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)
4			

0.5 b) En déduire que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |\alpha|$

0.5 c) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $\alpha$

### Partie III :

On suppose dans cette partie que  $n \geq 2$

0.5 1- a) Montrer que pour tout entier  $n \geq 2$ , il existe un unique réel  $x_n$  solution de l'équation  $f_n(x) = 0$

0.5 b) Montrer que pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $0 < x_n < 1$

(On prendra  $\frac{2e}{1+e} < 1.47$ )

0.5 2-a) Montrer que pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $f_{n+1}(x_n) > 0$

0.5 b) En déduire que la suite  $(x_n)_{n \geq 2}$  est strictement décroissante.

0.5 c) Montrer que la suite  $(x_n)_{n \geq 2}$  est convergente.

0.5 3-a) Montrer que pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $\frac{1}{n} < x_n < \frac{1}{n} \left(\frac{2e}{1+e}\right)$

0.5 b) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ , puis montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n = 1$

0.5 4-a) Montrer que pour tout entier  $n \geq 2$ , on a :  $x_n \leq x_2$

0.5 b) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n)^n$

### EXERCICE2 : (4 points)

Soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois nombres complexes non nuls tel que :  $a + b \neq c$

0.5 1-a) Résoudre dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  l'équation d'inconnue  $z$

$$(E) : z^2 - (a+b+c)z + c(a+b) = 0$$

0.5 b) On suppose dans cette question que :  $a = i$ ,  $b = e^{i\frac{\pi}{3}}$  et  $c = a - b$

Ecrire les deux solutions de l'équation (E) sous forme exponentielle.

2- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère les trois points  $A(a)$ ,  $B(b)$  et  $C(c)$  qu'on suppose non alignés.

Soient  $P(p)$  le centre de la rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$  qui transforme  $B$  en  $A$

et  $Q(q)$  le centre de la rotation d'angle  $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$  qui transforme  $C$  en  $A$

et  $D(d)$  le milieu du segment  $[BC]$

الصفحة	4	NS 24F	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2021 - الموضوع - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)
4			

- 1 a) Montrer que :  $2p = b + a + (a - b)i$  et  $2q = c + a + (c - a)i$
- 0.5 b) Calculer :  $\frac{p - d}{q - d}$
- 0.5 c) En déduire la nature du triangle  $PDQ$
- 3- Soient  $E$  le symétrique de  $B$  par rapport à  $P$  et  $F$  le symétrique de  $C$  par rapport à  $Q$  et  $K$  le milieu du segment  $[EF]$
- 0.5 a) Montrer que l'affixe de  $K$  est  $k = a + \frac{i}{2}(c - b)$
- 0.5 b) Montrer que les points  $K$ ,  $P$ ,  $Q$  et  $D$  sont cocycliques.

**EXERCICE3** : (4 points)

**Partie I** : On considère dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation  $(E)$  :  $47x - 43y = 1$

- 0.25 1- Vérifier que le couple  $(11, 12)$  est une solution particulière de l'équation  $(E)$
- 0.75 2- Résoudre dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation  $(E)$

**Partie II** : On considère dans  $\mathbb{Z}$  l'équation  $(F)$  :  $x^{41} \equiv 4 \pmod{43}$

- 1- Soit  $x \in \mathbb{Z}$  une solution de l'équation  $(F)$
- 0.5 a) Montrer que  $x$  et 43 sont premiers entre eux, en déduire que :  $x^{42} \equiv 1 \pmod{43}$
- 0.5 b) Montrer que :  $4x \equiv 1 \pmod{43}$ , en déduire que :  $x \equiv 11 \pmod{43}$
- 0.5 2- Donner l'ensemble des solutions dans  $\mathbb{Z}$  de l'équation  $(F)$

**Partie III** : On considère dans  $\mathbb{Z}$  le système à deux équations suivant  $(S)$  :  $\begin{cases} x^{41} \equiv 4 \pmod{43} \\ x^{47} \equiv 10 \pmod{47} \end{cases}$

- 1- Soit  $x$  une solution du système  $(S)$
- 0.5 a) Montrer que  $x$  est solution du système  $(S')$  :  $\begin{cases} x \equiv 11 \pmod{43} \\ x \equiv 10 \pmod{47} \end{cases}$
- 0.5 b) En déduire que :  $x \equiv 527 \pmod{2021}$  (On pourra utiliser la partie I)
- 0.5 2- Donner l'ensemble des solutions dans  $\mathbb{Z}$  du système  $(S)$

**FIN**

الصفحة	1	<b>الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا</b> <b>المسالك الدولية</b> <b>الدورة العادية 2021</b> <b>- عناصر الإجابة -</b>	الجمهورية المغربية وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي <b>المركز الوطني للتقويم والامتحانات</b>
2			
**1			
SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS		NR 24F	

4h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	الشعبة أو المسلك

Exercice 1		Éléments de solutions	Barème
Partie I	1-	a) - On montre que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_n(x) - nx + 2) = 0$ ----- - La droite d'équation $y = nx - 2$ est asymptote à $(C_n)$ au voisinage de $+\infty$ .-----	0.25 0.25
		b) On montre que la droite $(\Delta_n): y = nx$ est une asymptote à $(C_n)$ au voisinage de $-\infty$ <b>Toute réponse non complète est notée 0</b>	0.5
	2-	a) - Montrer que $f_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ ..... - Justifier l'expression de $f_n'(x)$ .....	0.25 0.25
		b) Montrer l'inégalité	0.5
		c) $f_0$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ Et pour $n \geq 1$ , $f_n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ <b>Toute réponse non complète est notée 0</b>	0.5
	3-	a) Détermination de l'équation de la tangente.	0.5
		b) Justifier que $I(0; -1)$ est l'unique point d'inflexion de $(C_n)$	0.5
	4-	Représentation graphique de $(C_0)$ .....	0.25
		Représentation graphique de $(C_2)$ .....	0.25
	5-	a) Calcul de l'intégrale.	0.5
		b) Justifier le calcul de $\lim_{t \rightarrow +\infty} A(t)$	0.5
	Partie II	1-	a) Justifier l'existence et l'unicité de $\alpha$ <b>Toute réponse non complète est notée 0</b>
b) Montrer l'inégalité			0.5
2-		a) Montrer l'inégalité	0.5
		b) Montrer l'inégalité c) Montrer la convergence de la suite vers $\alpha$	0.5 0.5
Partie III	1-	a) Justifier l'existence et l'unicité de $x_n$	0.5
		b) Justifier la double inégalité	0.5
	2-	a) Justifier l'inégalité	0.5
		b) Montrer que la suite est strictement décroissante	0.5
		c) Justifier que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est convergente	0.5
3-	a) Justifier la double inégalité	0.5	

الصفحة	2	NR 24F	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2021 - عناصر الإجابة - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)
2			

		b)	Calcul de $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ .....	0.25
			Justifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n = 1$ .....	0.25
	4-	a)	Justifier l'inégalité	0.5
		b)	Déduction de $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n)^n$	0.5

Exercice 2		Éléments de solutions	barème
1-	a)	La résolution de l'équation <b>Toutes les méthodes sont acceptées</b>	0.5
	b)	L'écriture des deux racines sous forme exponentielle.	0.25x2
2-	a)	La démonstration des deux égalités	0.5x2
	b)	Le calcul du rapport	0.5
	c)	La détermination de la nature du triangle $PDQ$	0.5
3-	a)	La démonstration de l'égalité	0.5
	b)	La démonstration de la cocyclicité des quatre points.	0.5

Exercice 3		Éléments de solutions	Barème	
Partie I	1-	Vérification	0.25	
	2-	La résolution de l'équation $(E)$ en justifiant les diverses étapes de la solution <b>Toute réponse non complète est notée 0</b>	0.75	
Partie II	1-	a)	Justifier que $x$ et 43 premiers entre eux..... Justifier la congruence $x^{42} \equiv 1 [43]$ .....	0.25 0.25
		b)	Justifier la congruence $4x \equiv 1 [43]$ .....	0.25
	2-		Justifier la congruence $x \equiv 11 [43]$ .....	0.25
			Détermination de l'ensemble des solutions de $(F)$	0.5
Partie III	1-	a)	-Justifier que $x \equiv 11 [43]$ .....	0.25
			- Justifier que $x \equiv 10 [47]$ .....	0.25
		b)	Justifier que $x \equiv 527 [2021]$ <b>Toute réponse non complète est notée 0</b>	0.5
	2-	Donner l'ensemble des solutions du système $(S)$ (Etude de la réciproque) <b>Toute réponse non complète est notée 0</b>	0.5	

/